

Квадратный трёхчлен: семинар

1. (**Устная задача**) Докажите, что при любых значениях a, b, c хотя бы одно из уравнений

$$x^2 + bx + c = 1, x^2 + cx + a = 1, x^2 + ax + b = 1$$

имеет корень.

2. (**Устная задача**) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень i обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
3. (**Письменная задача**) Найдите все такие пары квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d$, что a и b — корни второго трёхчлена, c и d — корни первого.
4. (**Письменная задача**) Пусть a, b, c — различные числа, причем $c \neq 0$. Известно, что уравнения $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имеют ровно один общий корень. Найдите все возможные значения суммы $a + b + c$.
5. (**Устная задача**) Квадратный трёхчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из трёхчленов $x^2 f\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ или $(x - 1)^2 f\left(\frac{1}{x - 1}\right)$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена $x^2 + 4x + 3$ получить $x^2 + 10x + 9$?
6. (**Устная задача**) Найдите все ошибки в решении и приведите правильное решение.

Условие: «У Миши было квадратное уравнение с одной переменной x . Он заменил в нём x на $\frac{3x+1}{2x+1}$ и получил другое уравнение. Могло ли оказаться так, что первое уравнение имеет хотя бы один корень, а второе уравнение корней не имеет?»

Ответ: нет, не могло.

Решение: «Пусть исходное уравнение имело вид $x^2 + px + q = 0$ (или сводилось к нему делением на первый коэффициент, что не изменяет корней уравнения). Так как оно имеет корни, $D = p^2 - 4q \geq 0$. После замены x на $\frac{3x+1}{2x+1}$ получим уравнение

$$\left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^2 + p \cdot \frac{3x+1}{2x+1} + q = 0.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим уравнение

$$(3x+1)^2 + p(3x+1)(2x+1) + q(2x+1)^2 = 0,$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приводится к виду

$$(6p + 4q + 9)x^2 + (5p + 4q + 6)x + (p + q + 1) = 0.$$

Его дискриминант равен

$$(5p + 4q + 6)^2 - 4(6p + 4q + 9)(p + q + 1) = p^2 - 4q \geq 0$$

поэтому оно имеет решений».

7. (**Устная задача**) Петя и Вася решали одну и ту же задачу, но получили разные ответы, хотя оба решения выглядят правдоподобно.

(а) Представьте, что Вы — член жюри олимпиады. Корректны ли данные решения? Почему в них есть отличия? Оценили бы Вы какое-то из решений в полный балл?

(б) Есть ли способы заранее предугадывать подобные ситуации и избегать их (ответьте как с позиции участника, так и составителя олимпиады)?

Условие: «Найдите все такие уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, что числа p и q являются его корнями».

Решение Пети. «По теореме Виета

$$\begin{cases} p + q = -p, \\ pq = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ p = 0 \\ p = 1 \\ q = -2 \end{cases}$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2 = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$ ».

Решение Васи: «Подставим числа p и q в данное уравнение:

$$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0, \\ q^2 + pq + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p^2 + q = 0, \\ q(q + p + 1) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Случай 1: } \begin{cases} q = 0, \\ 2p^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0, \\ p = 0. \end{cases}$$

$$\text{Случай 2: } \begin{cases} q = -p - 1, \\ 2p^2 - p - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1, \\ q = -2, \\ p = -0,5, \\ q = -0,5. \end{cases}$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2 = 0$, $x^2 + x - 2 = 0$ и $x^2 - 0,5x - 0,5 = 0$ ».

8. (**Устная задача**) Микрокалькулятор МК-17 умеет над числами, занесёнными в память, производить только три операции:

1) проверять, равны ли выбранные два числа,

2) складывать выбранные числа,

3) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число x . Как с помощью МК-17 узнать, равно ли это число единице.