

## Ориентированные графы. Лекция.

**Определение.** *Ориентированный граф* — граф, ребра которого имеют направление. По умолчанию в ориентированном графе нет петель и сонаправленных кратных ребер, но допускаются противоположно направленные ребра

**Определение.** Вершины  $a$  и  $b$  ориентированного графа  $G$  назовем связанными, если в графе  $G$  существуют пути из  $a$  в  $b$  и из  $b$  в  $a$ .

**Определение.** Ориентированный граф  $G$  называется сильно связным, если любые его две вершины связаны.

- (а)** В связном ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно занумеровать так, что рёбра ведут из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером.

**(б)** Докажите, что если в ориентированном графе нет ориентированных циклов, а длина наибольшего ориентированного пути равна  $n$ , то вершины графа можно разбить на  $n$  групп так, чтобы внутри каждой группы не было стрелок.
- В едином и неделимом государстве некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, и только президент имеет право ездить в любом направлении. После многократных поездок по стране президент заметил, что если выехать из любого города, проехать по любому количеству дорог и вернуться обратно, то разность количества дорог, которые он проехал по правилам и тех дорог, которые он проехал не по правилам, всегда делится на три. Докажите, что страну можно разделить на три независимые республики так, что из первой республики дороги будут вести только во вторую, из второй — только в третью и из третьей — только в первую.

**Определение.** *Турниром* называется полный ориентированный граф.

**Определение.** Путь (цикл) называется *гамильтоновым*, если он проходит по всем вершинам графа ровно один раз.

- Докажите, что в любом сильно связном турнире есть гамильтонов цикл.
- Дан турнир с  $n$  вершинами, который не является сильно связным. У какого наименьшего количества рёбер нужно поменять направление так, чтобы граф стал сильно связным?

## Ориентированные графы. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 26 февраля

*Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.*

### Базовый уровень.

- Докажите, что в сильно связном ориентированном графе с  $n$  вершинами хотя бы  $n$  рёбер.
- В турнире с  $n$  вершинами посчитаем две величины:  $P$  — сумма квадратов входящих степеней всех вершин,  $Q$  — сумма квадратов входящих степеней всех вершин. Докажите, что  $P = Q$ .
- Про связный ориентированный граф известно, что если мы выйдем из любой вершины  $A$  по любому ребру, то потом сможем вернуться по ребрам в вершину  $A$ . Докажите, что граф сильно связный.

### Продвинутый уровень.

- Докажите, что в сильно связном турнире с  $n > 4$  вершинами существует хотя бы 2 вершины такие, что при удалении одной из них сильная связность графа не теряется.
- В ориентированном графе на  $n$  вершинах любые две вершины соединяет не более одного ребра. Какое наибольшее количество циклов длины 3 в нём может быть?
- Пусть  $G$  — сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа  $G$  в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.