

Последовательности. Лекция.

Что бывает полезного в задачах на последовательности:

- Индукция
 - Рекурренты
 - Оценки и инварианты
1. Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями $x_1 = 20, x_2 = 22, x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$. Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль и найдите номер этого члена.
 2. Докажите, что для любого простого p среди чисел Фибоначчи будет число кратное p .
 3. Сколькими способами можно разбить полосу 2×2025 на доминошки?
 4. Последовательность положительных вещественных чисел $\{a_n\}$ такова, что $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$. Докажите, что $a_n < \frac{1}{n}$ для всех натуральных n .
 5. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой $a_n = n + [\sqrt{n}]$, где $[x]$ — ближайшее к x целое число (число с дробной частью 0,5 округляется вверх). Найдите наименьшее натуральное k , такое, что числа $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+2025}$ образуют 2026 последовательных натуральных числа.
 6. Последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1} = b_n + c_n, \quad c_{n+1} = c_n + d_n, \quad d_{n+1} = d_n + a_n.$$

Известно, что все эти последовательности периодичны. Докажите, что их вторые члены равны 0.

Последовательности. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 19 февраля

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. На доске написано число, большее 1. Каждую минуту Лена делит написанное на доске число на его дробную часть и записывает на доску вместо старого. Докажите, что когда-нибудь на доске появится либо целое число, либо число, большее 20252026. (Напомним, что дробная часть числа x — это разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x .)
2. Последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом: a_1, a_2 — произвольные действительные числа, при $n \geq 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, где $1 \leq i < j \leq n - 1$. При некотором выборе a_1, a_2 получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.
3. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?

Продвинутый уровень.

4. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.
5. Последовательность задана рекуррентно: $a_1 = \frac{1}{2}, a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 a_n$. Найдите формулу общего члена.
6. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$. Докажите, что $1 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1$ для всех $n \geq 2$.