

# Процессы. Лекция.

Ключевые методы, которые помогают в решении задач на процессы:

- Инварианты, полуинварианты
- Постепенное конструирование
- Что-то может быть бесконечным

**Определение** Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел:  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n), B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Будем говорить, что  $A > B$  (или  $A$  мажорирует  $B$ ), если: или  $a_1 > b_1$ ; или  $a_1 = b_1$  и  $a_2 > b_2$ ; или  $a_1 = b_1, a_2 = b_2$  и  $a_3 > b_3$  и т.д.

**Теорема.**

- (a) если  $A \leq B, B \leq C$ , то  $A \leq C$ .
- (b) строго убывающая последовательность строк длины  $n$  всегда конечна.
- (c) в каждом непустом множестве строк длины  $n$  есть наименьший элемент.
1. На олимпиаде у каждого участника не более 25 знакомых. Докажите, что можно рассадить всех участников по трём аудиториям так, чтобы у каждого в его аудитории было не более 8 знакомых.
  2. На плоскости заданы  $2n$  точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что эти точки являются концами  $n$  непересекающихся отрезков.
  3. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
  4. Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.
  5. У Карлсона есть 100 банок с вареньем. Банки не обязательно одинаковые, но в каждой не больше, чем третья часть всего варенья. На завтрак Карлсон может съесть поровну варенья из любых трёх банок. Докажите, что Карлсон может действовать так, чтобы за некоторое количество завтраков съесть все варенье.

# Процессы. Семинар.

1. Ученики школы посещают кружки. Докажите, что можно несколько школьников принять в пионеры так, чтобы в каждом кружке был хотя бы один пионер и для любого пионера нашелся кружок, в котором он был бы единственным пионером.
2. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.
3. На доске написаны 3 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое или геометрическое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее — натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов (если при любом возможном ходе набор чисел не меняется, то будем считать, что ходить больше нельзя).
4. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из  $n$  крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые  $k (k = 1, \dots, n)$  подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?
5. В каждой из 2020 стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с данной страной стран правит не та партия, которая правит в данной стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.
6. Петя вырезал из бумаги 2020 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.