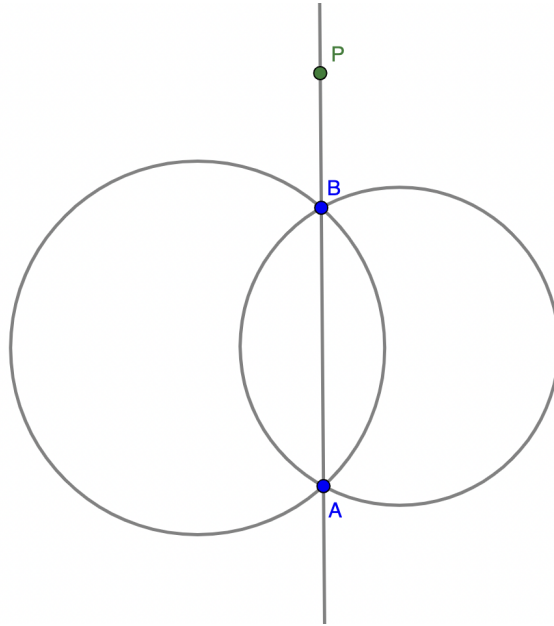


Степень точки

21 ноября



$$\text{Pow}_{\omega_1}(P) = \text{Pow}_{\omega_2}(P)$$

1. (а) Пусть окружности ω_A и ω_C проходят через B касаются стороны AC остроугольного $\triangle ABC$ в точках A и C . Докажите, что точка пересечения ω_A и ω_C отличная от B лежит на одной из медиан $\triangle ABC$.

(б) Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , равны между собой углы BAC и CBD , а также углы BCA и CDB . Докажите, что касательные, проведённые из точек B и C к описанной окружности треугольника AOD , равны.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC .

4. Внутри окружности зафиксированы точки P и Q . Рассматриваются хорды XY , проходящие через P . Докажите, что центры окружностей, проходящих через точки Q, X, Y , лежат на фиксированной прямой.

5. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C . Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q . Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

6*. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1, BB_1, CC_1 . На отрезках AA_1, BB_1 и CC_1 отметили соответственно точки A_2, B_2, C_2 так, что $\angle BA_2C = \angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$. Отрезки AC_2 и A_2C пересекаются в точке B_3 , отрезки CB_2 и B_2C — в точке A_3 , отрезки BA_2 и B_2A — в точке C_3 . Докажите, что в шестиугольник $A_2B_3C_2A_3B_2C_3$ можно вписать окружность.