Графы в задачах. Лекция.

- Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер графа.
- В дереве на n вершинах всего $n-1$ ребро.
- В любом графе можно выделить остовное дерево.
- Любой граф можно подвесить
- Решая задачу про граф можно использовать метод математической индукции :)

1. На плоскости перегородками (единичными отрезками) выложили клетчатый квадрат 5×5. Какое минимальное число перегородок нужно удалить, чтобы из каждого квадратика можно было выйти наружу (не пересекая перегородку)?

2. На чемпионат по игре в шляпу приехало n команд, в каждой из которых по два человека. Все $2n$ участников произвольным образом уселись за круглый стол. После этого все спохватились, что игру можно начать, только когда люди из одной команды будут сидеть напротив. За одно действие разрешается поменять любых двух участников местами. Какое наименьшее число действий придется совершить, чтобы гарантировано можно было начать игру?

3. В цветочном городе живёт некоторое число коротышек. В первый день один из них заболел. Если коротышка болеет, то к нему приходят все его здоровые друзья и заражаются (то есть становятся больными в следующий день). Если коротышка один день болел, то он выздоравливает на следующий день, и более того, получает иммунитет на этот день. Коротышка с иммунитетом может навещать друзей без риска заражения. Может ли так случиться, что эпидемия будет продолжаться бесконечно долго?

4. На полке стоит 10-томное собрание сочинений в некотором порядке (тома пронумерованы от 1 до 10). За один ход можно поменять местами любые две книги. За какое наименьшее количество ходов все тома можно с гарантией расположить в порядке возрастания номеров?

5. В таблице $m \times n$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.

6. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогой, причём из каждого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

Графы в задачах. Семинар.

1. На столе лежат монеты достоинством в $1, 2, 3$ и 5 рублей на сумму 99 рублей. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты — соседи, если они касаются друг друга).

2. На доске 100×100 отмечены n клеток. Известно, что ладья, начав с любой из отмеченных клеток, может за несколько ходов оказаться в любой строке, а также в любом столбце, причем она может перемещаться только по отмеченным клеткам. Какое наименьшее количество клеток может быть отмечено на доске?

3. В спортклубе тренируются 100 толстяков, веса которых равны 1кг, 2кг,. . . , 100кг. На какое наименьшее число команд их можно разделить, чтобы ни в какой команде не было двух толстяков, один из которых вдвое тяжелее другого?

4. *(ПИСЬМЕННО)* Среди 100 болельщиков некоторые (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое наименьшее количество вопросов это наверняка можно сделать?

5. Есть несколько точек, некоторые из которых соединены дугами так, что из любой точки в любую другую можно добраться по этим дугам. Андрей ставит на каждой дуге красную и синюю стрелки в противоположных направлениях. Докажите, что Андрей может расставить стрелки так, чтобы из любой точки в любую можно было пройти путем, на котором цвет стрелки меняется не более одного раза. Идти при этом разрешается только в направлении, указываемом стрелкой какого-либо цвета.

6. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем ладейно связным, если из каждой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

7. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (т.е. любые две строки отличаются хотя бы по одному элементу). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.