

Гомотетия

5 ноября

Теоретическая часть

Раньше вы встерчались только с преобразованиями сохраняющими длины отрезков (так называемыми движениями): симметрии относительно прямой и точки, поворот. Сегодня мы изучим преобразование которое меняет длины.

Опр. 1. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называют преобразование плоскости сопоставляющее каждой точке X такую точку X' на прямой OX , что выполняется $OX' = |k| \cdot OX$ и если $k > 0$, то X лежит на луче OX , иначе на луче дополняющем OX до прямой. Для тех кто знает вектора можно перформулировать более просто: $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$.

Обозначение. Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k — H_O^k .

Опр. 2. Образом множества A при преобразовании F называют множество всех элементов b , таких что для них существует элемент a из A такой, что a переходит в b при преобразовании F .

Обозначение. Образ множества A при преобразовании F — $F(A)$.

Иными словами образ это то, куда переходит множество A .

Опр. 3. Фигуры F_1 и F_2 называются **гомотетичными** если существует гомотетия H такая, что $F_2 = H(F_1)$.

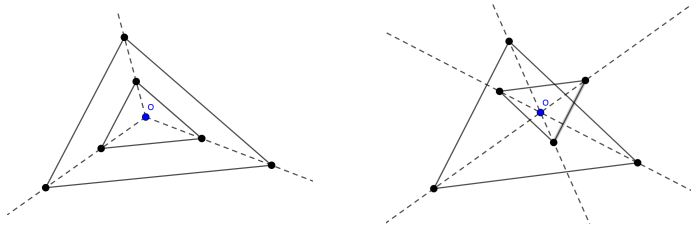
Опр. 4. Прообразом множества A при преобразовании F называют множество всех элементов b , таких что для них существует элемент a из A такой, что b переходит в a при преобразовании F .

Иными словами прообраз это то, откуда пришло к нам множество A .

Основные свойства гомотетии.

С1. Образ всякой прямой l при гомотетитии — прямая l' , такая что $l \parallel l'$. В частности, если центр гомотетии лежал на l , то прямая перейдет в себя.

С2. Неравные треугольники гомотетичны тогда и только тогда, когда их соответствующие стороны параллельны. С помощью этого можно доказывать, что какие то тройки прямых проходят через одну точку: достаточно найти на них вершины треугольников с параллельными сторонами.

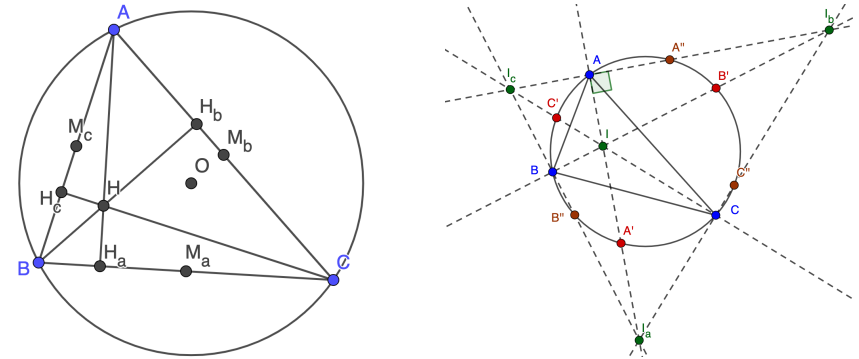


С3. Образ окружности ω с центром O_1 при гомотетии H_O^k — окружность ω' с центром $H_O^k(O_1)$. Если центр гомотетии лежал на ω , то ω и ω' касаются в точке O . Бывает иногда удобно сделать гомотетию с центром в точке касания двух окружностей и перевести одну из них в другую.

Гомотетия и замечательные точки

5 ноября

Практическая часть



В этом листике M_a, M_b и M_c — середины сторон; точки H_a, H_b и H_c — основания высот; H — ортоцентр; A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности с центром в точке I ; точки I_a, I_b и I_c — центры вневписанных окружностей касающихся сторон BC, AC и AB ; A_0, B_0 и C_0 — середины меньших дуг BC, AC и AB , O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC .

Все задачи нужно решать используя свойства гомотетии! Задачи по пунктам не принимаются!

- Докажите, что (а) $\triangle ABC$ и $\triangle M_a M_b M_c$ гомотетичны; (б) медианы $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке (обозначим ее M); (в) $\frac{AM}{MM_a} = 2$.
- Докажите, что (а) образ прямой AH_a при гомотетии из прошлой задачи — серединный перпендикуляр к BC ; (б) $O = H_M^{-\frac{1}{2}}(H)$; (в) Прямая Эйлера Точки O, M, H лежат на одной прямой и $\frac{HM}{MO} = 2$.
- (а) Окружность 9 точек Докажите при помощи гомотетии $H_H^{\frac{1}{2}}$, что точки $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$ и середины отрезков AH, BH и CH лежат на одной окружности. (б) Найдите отношение радиуса описанной окружности $\triangle ABC$ и его окружности 9 точек. (в) Пусть O_9 — центр окружности 9 точек $\triangle ABC$. Докажите, что O_9 лежит на прямой Эйлера $\triangle ABC$. (г) В каком отношении O_9 делит отрезок HO ?
- (а) Докажите, что прямые $A_0 A_1, B_0 B_1, C_0 C_1$ пересекаются в одной точке. (б) Докажите, что IO проходит через точку пересечения прямых из предыдущего пункта.
- Докажите, что прямые Эйлера треугольников $A_0 B_0 C_0, A_1 B_1 C_1$ и $I_a I_b I_c$ совпадают.

6. Найдите отношение радиуса описанной окружности $\triangle II_b I_c$ к радиусу описанной окружности $\triangle ABC$.