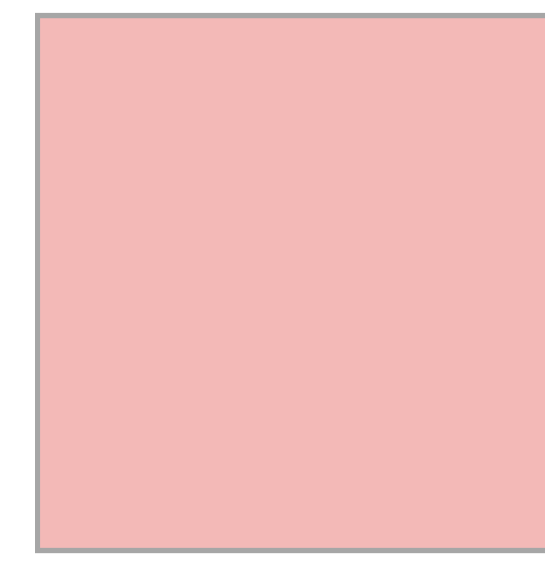
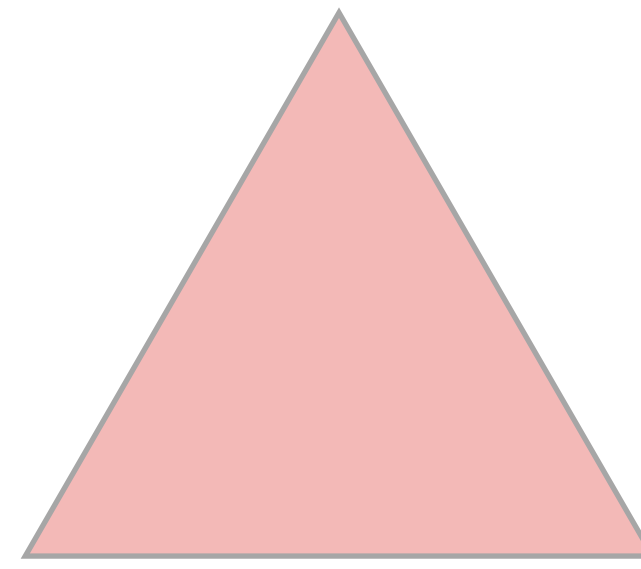
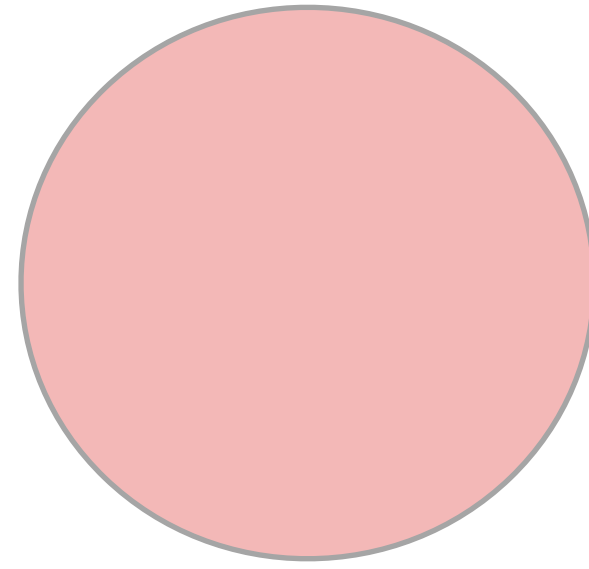




Гомотетия

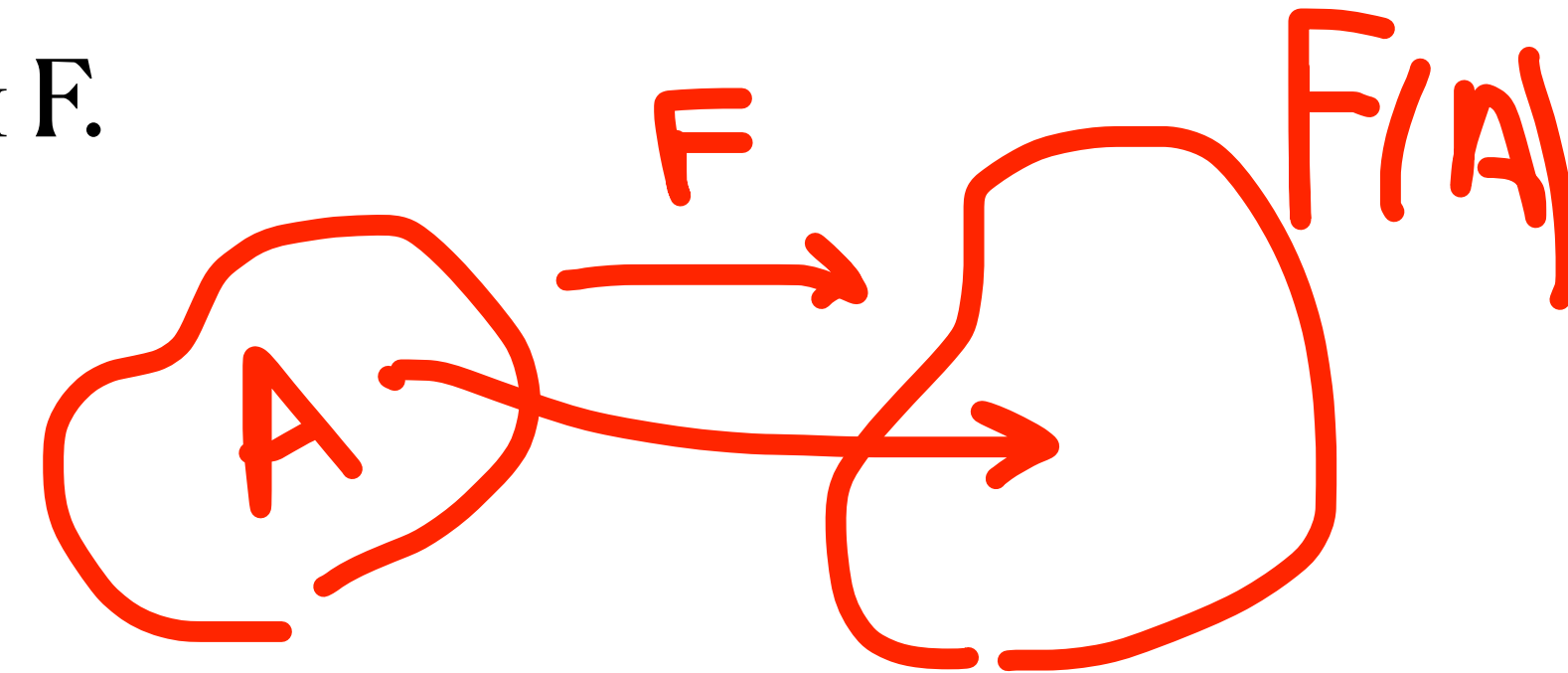
*Вы не выше меня, вы —
длиннее.*

Наполеон I Бонапарт

Образ и прообраз

Образом множества A при преобразовании F называют множество всех элементов b , таких что для них существует элемент a из A такой, что a переходит в b при преобразовании F .

Иными словами образ это то, куда переходит множество A .



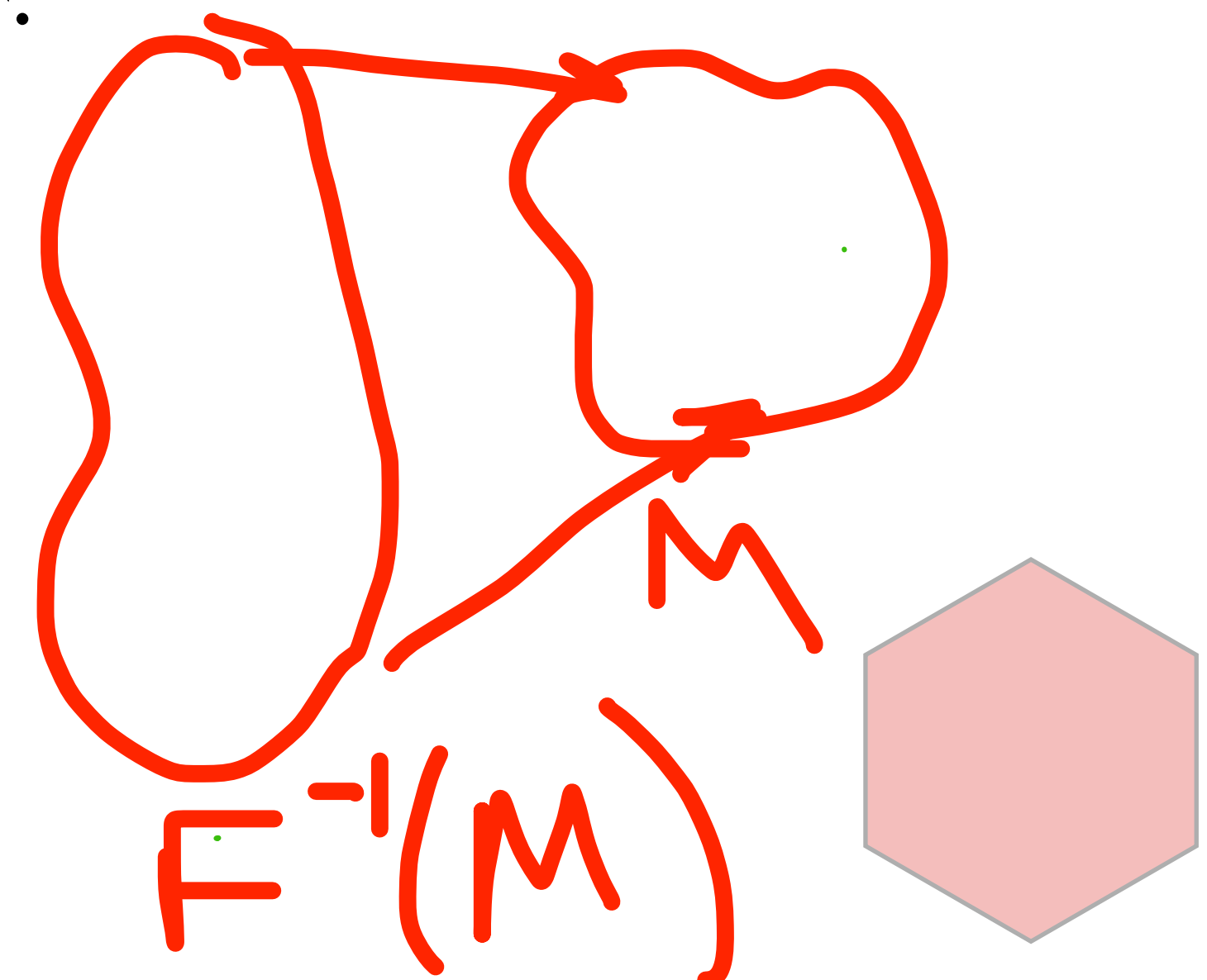
Обозначение. Образ множества A при преобразовании F — $F(A)$.

Прообразом множества A при преобразовании F называют множество всех элементов b , таких что для них существует элемент a из A такой, что b переходит в a при преобразовании F .

Иными словами прообраз это то, откуда пришло к нам множество A .

Обозначение. Прообраз множества A при преобразовании F — $F^{-1}(A)$.

$$\begin{array}{c} F(F(x)) = x \\ x \rightarrow y \end{array}$$



k

Что такое гомотетия?

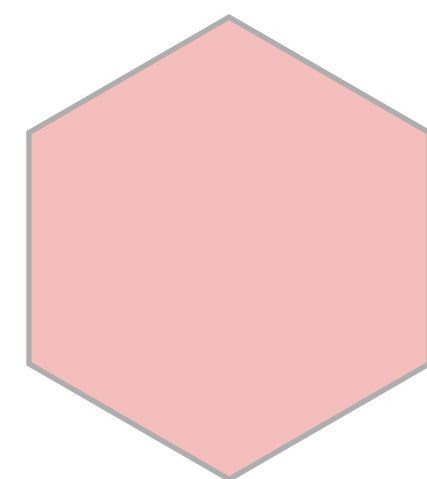
Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называют преобразование плоскости сопоставляющее каждой точке X такую точку X' на прямой OX , что выполняется $OX' = |k| \cdot OX$ и

- если $k > 0$, то X лежит на луче OX
- иначе на луче дополняющем OX до прямой.

Для тех кто знает вектора можно перформулировать проще:

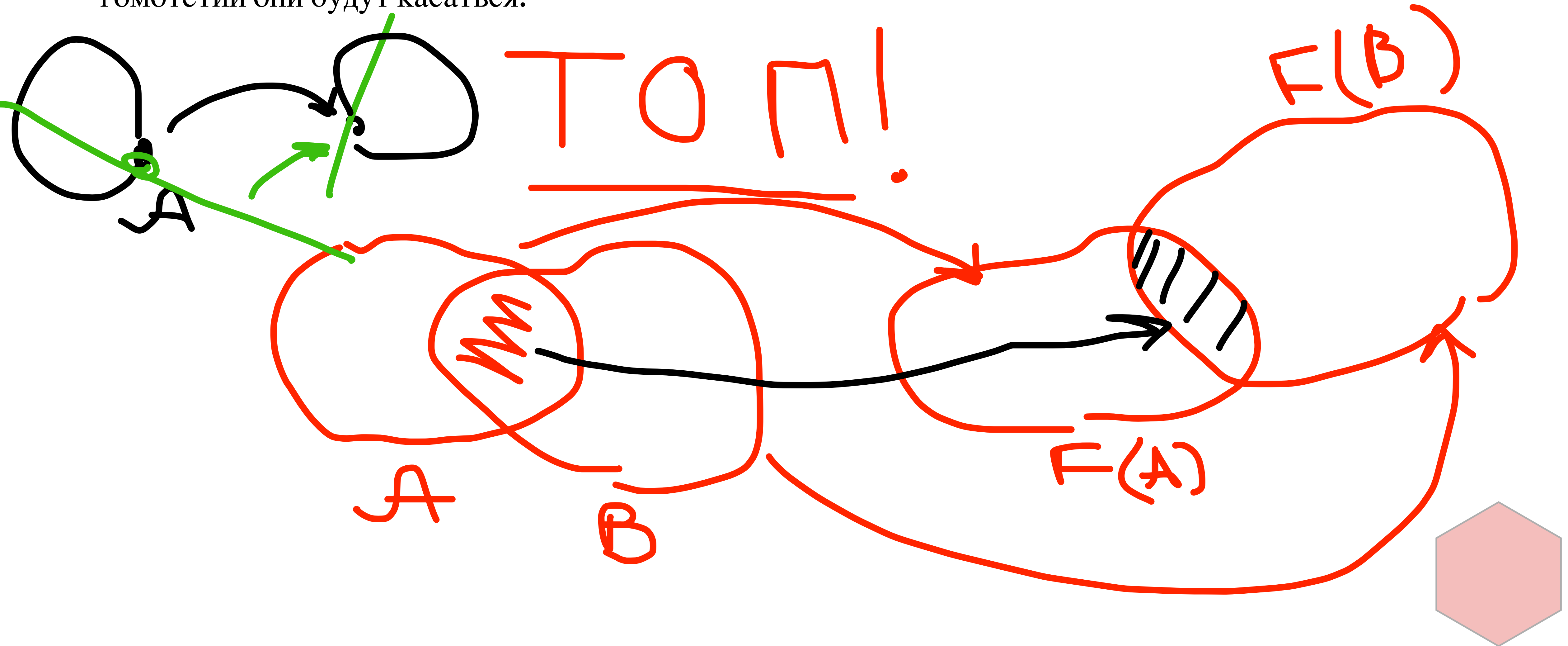
$$\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}.$$

Обозначение. Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k — H_O^k .



Свойство №0

Гомотетия не меняет количество точек пересечения. В частности, если два объекта касались, то и после гомотетии они будут касаться.

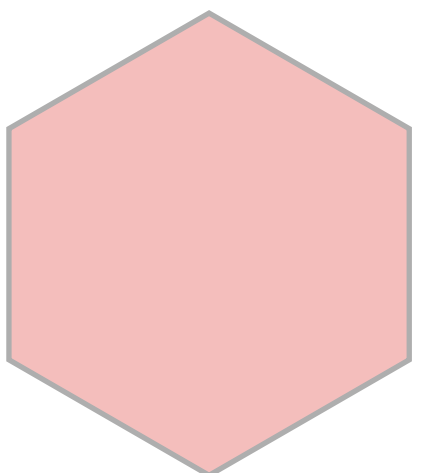
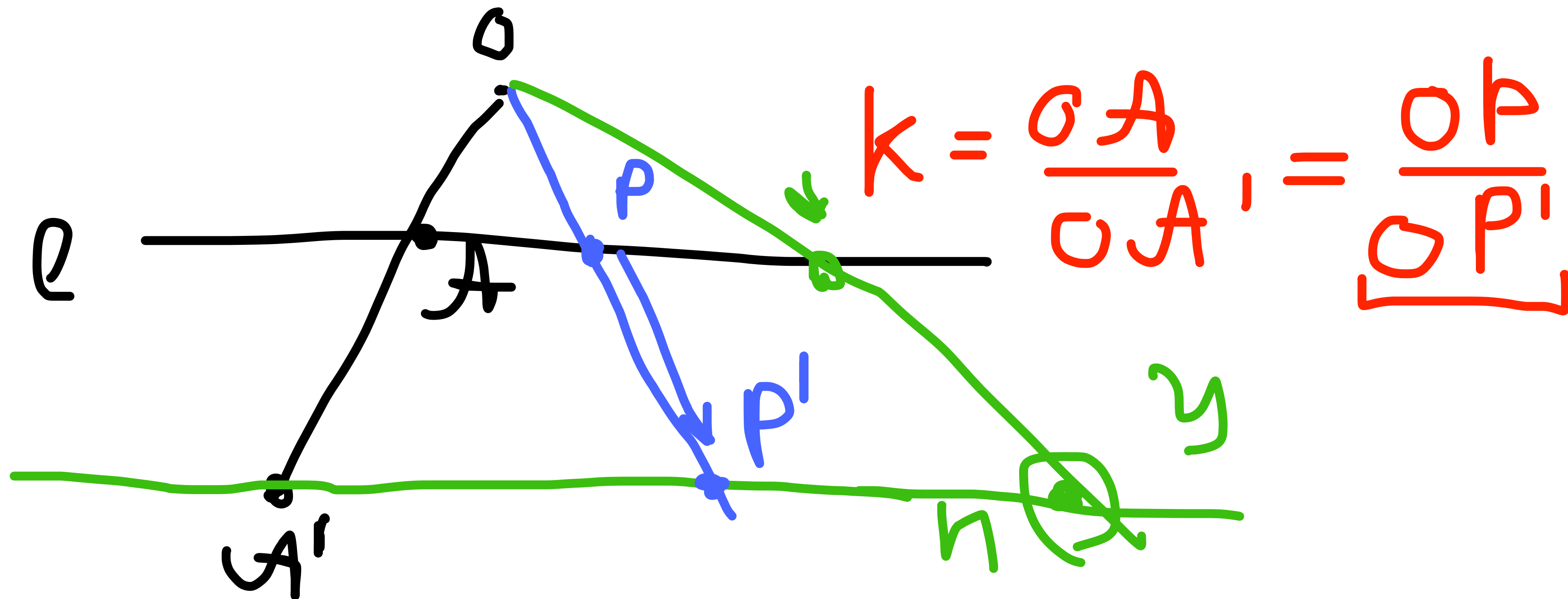


Свойство №1. Образ прямой

Образ всякой прямой l при гомотетии — прямая l' , такая что $l \parallel l'$.

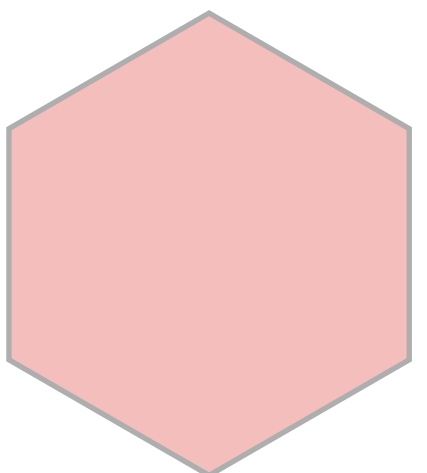
В частности, если центр гомотетии лежал на l , то прямая перейдет в себя.

$$H_O^k(l) \parallel l, \text{ и, если } O \in l, \text{ то } H_O^k(l) = l.$$



Как решать задачи?

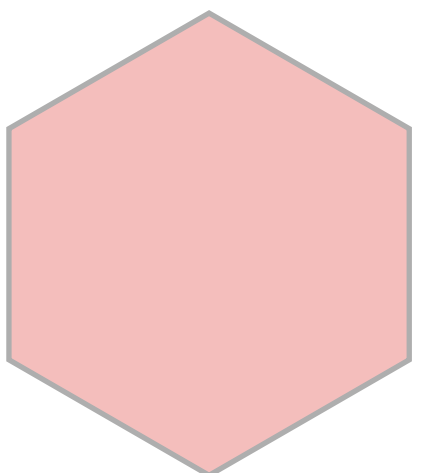
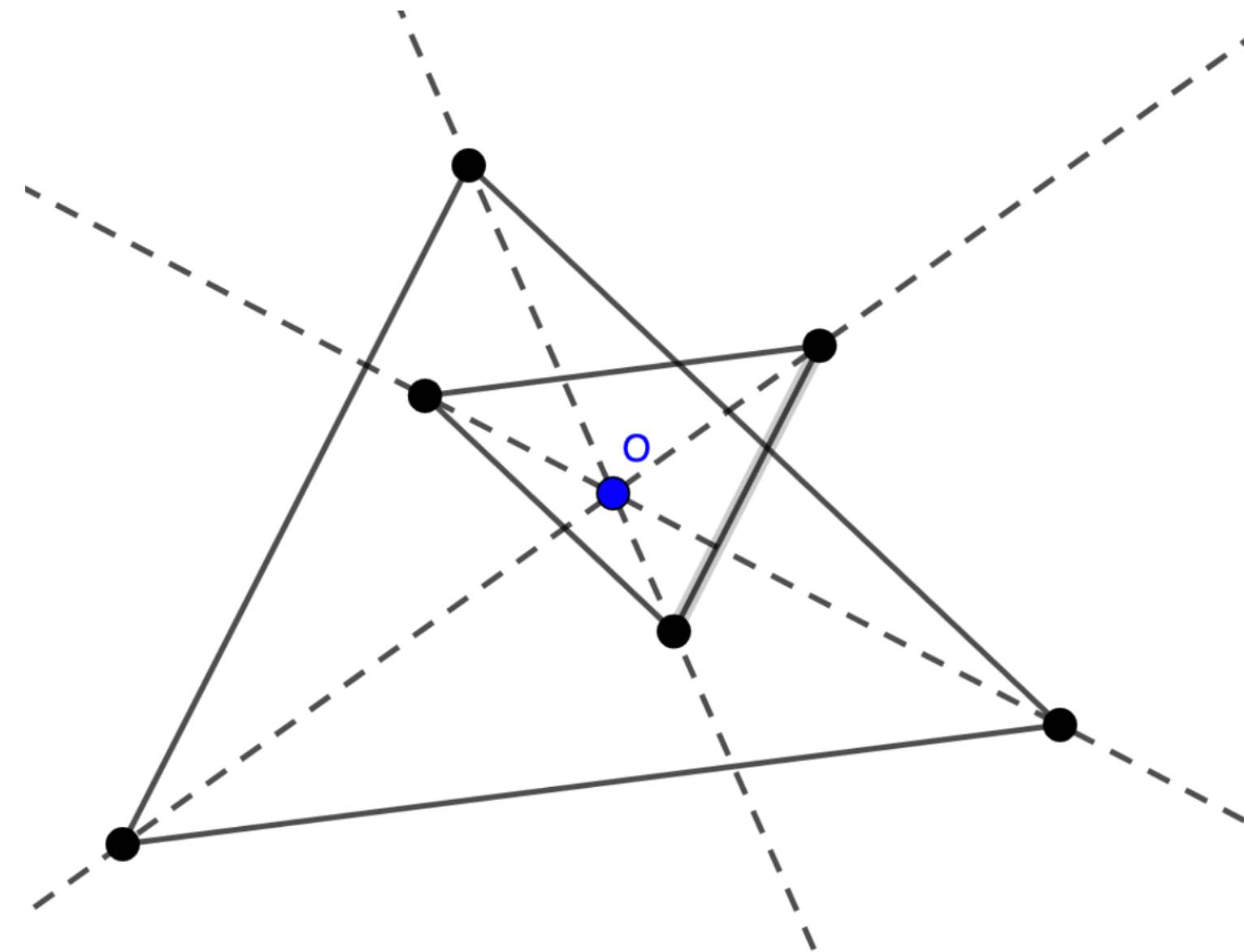
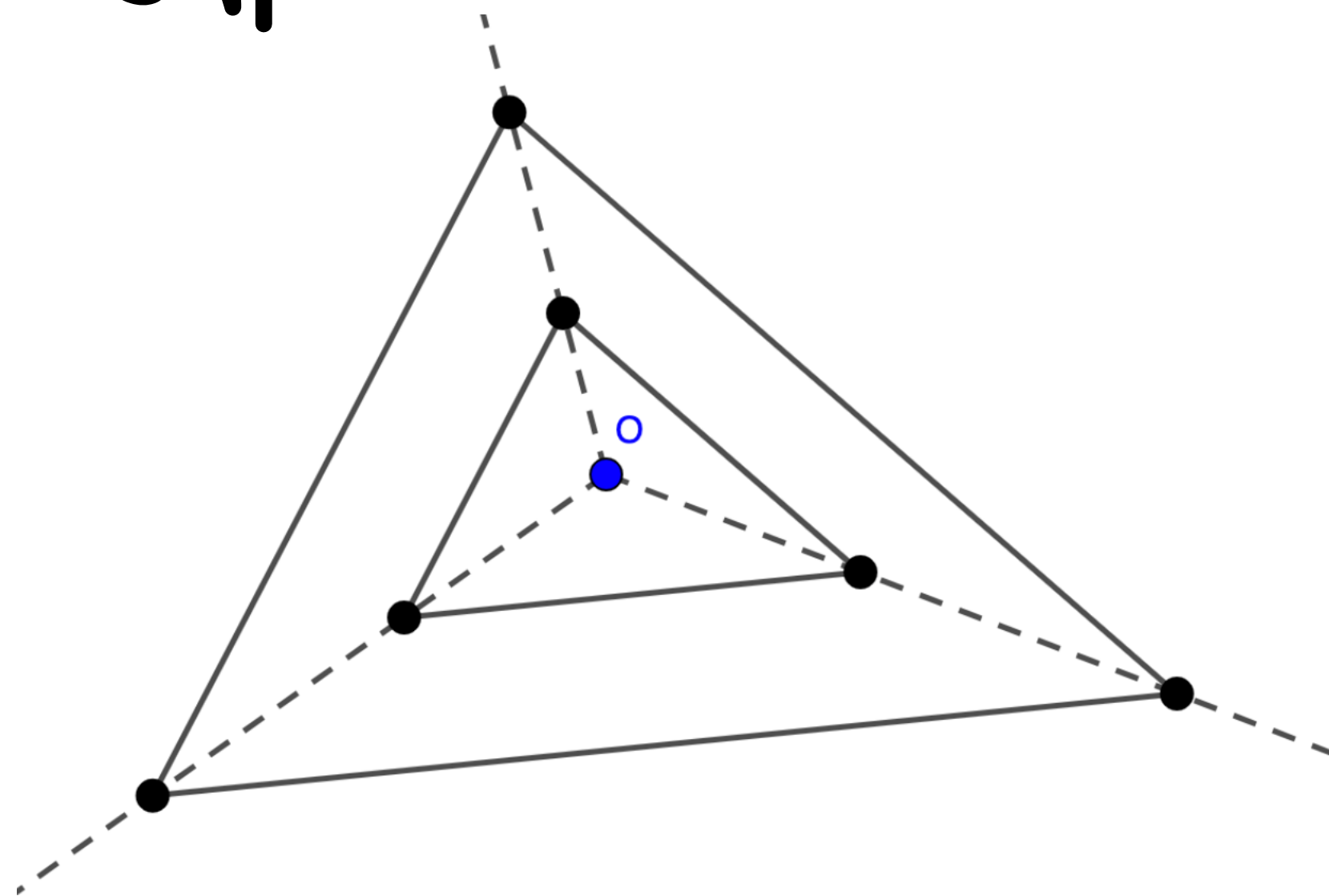
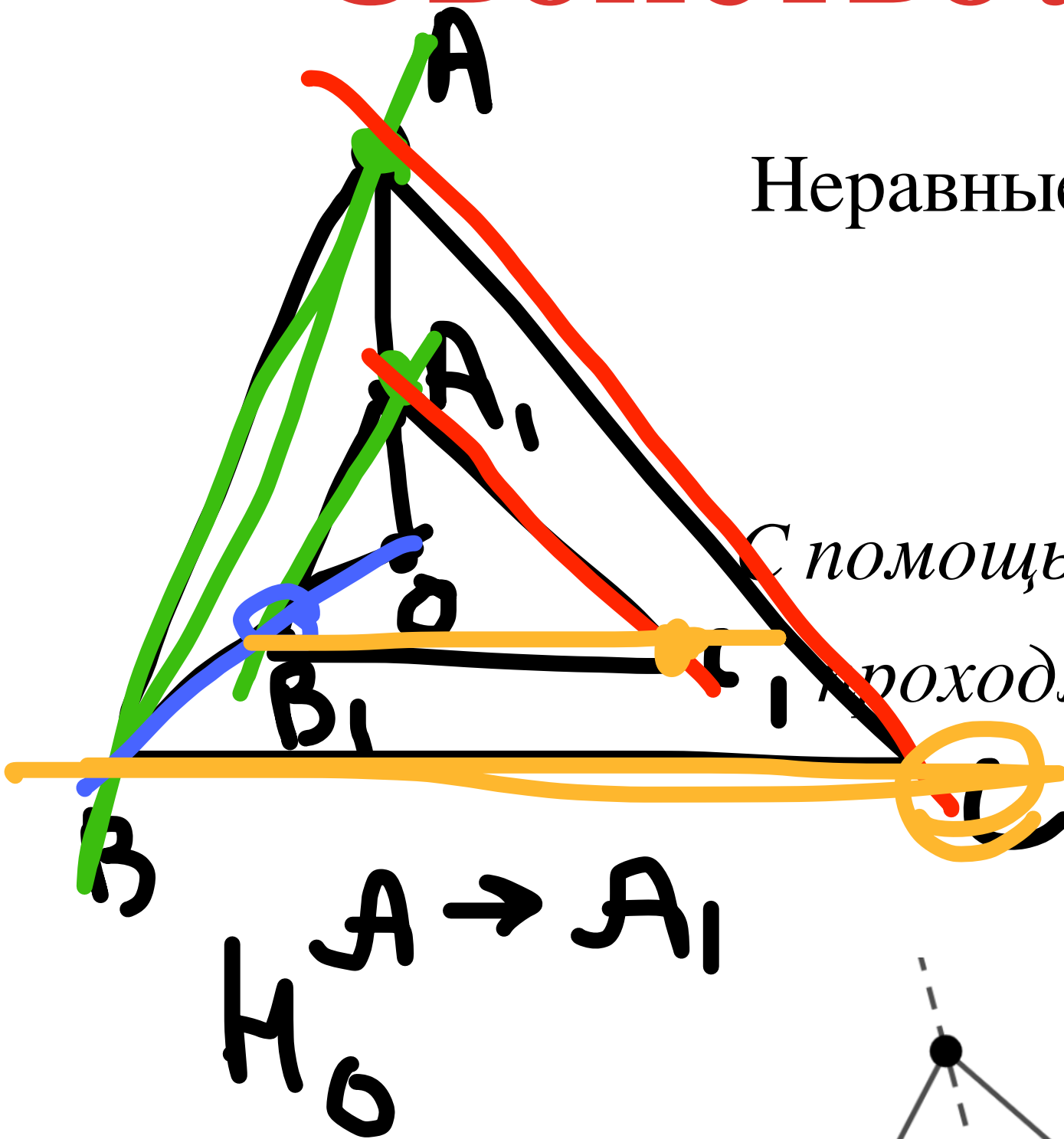
- Находим образы точек конструкции при гомотетии.
- Для этого используем свойства гомотетии и **не доказываем** их заново!



Свойство №2. Гомотетичные треугольники

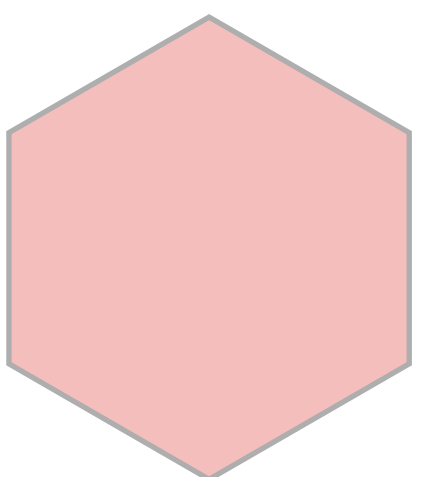
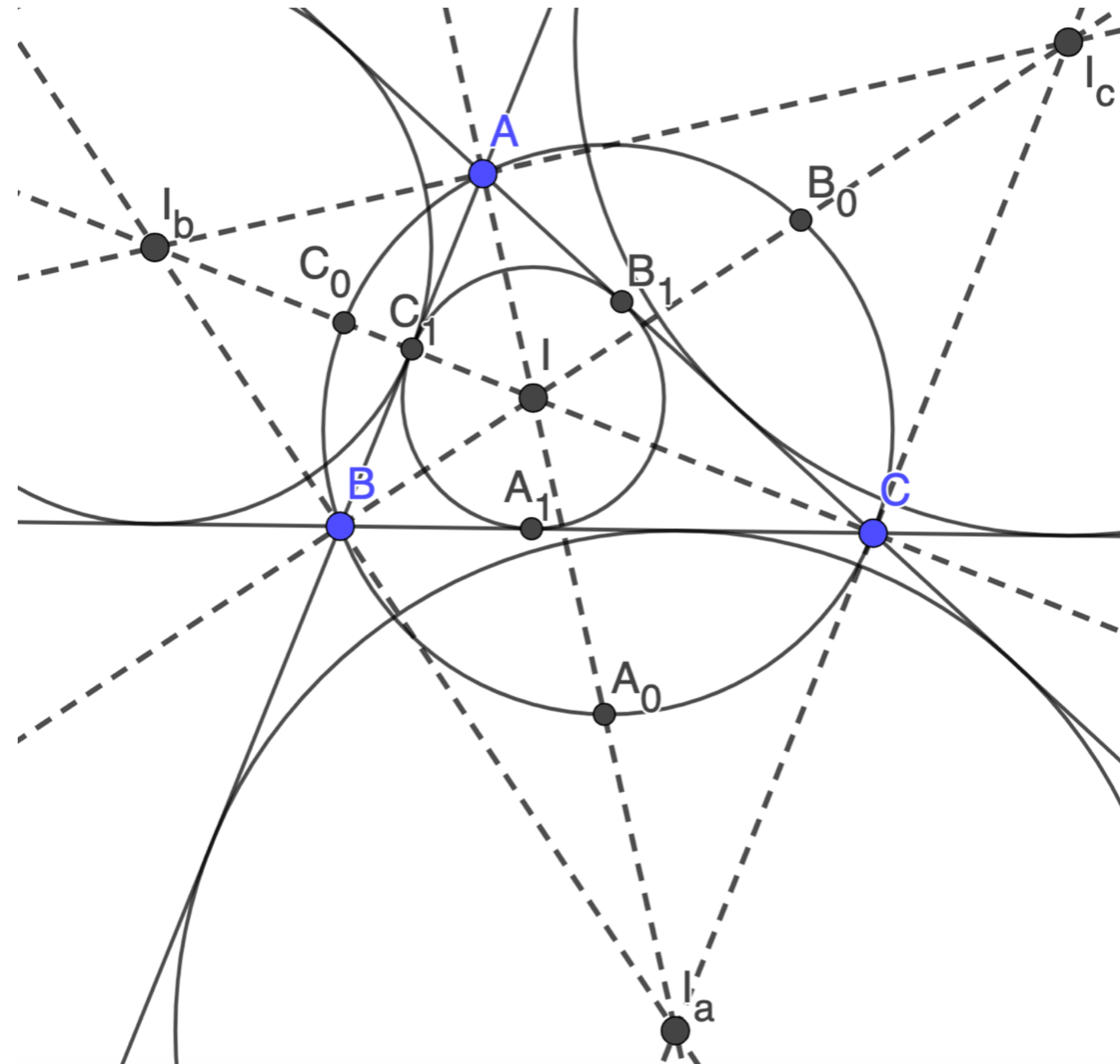
Неравные треугольники гомотетичны тогда и только тогда, когда их соответствующие стороны параллельны.

С помощью этого можно доказывать, что какие то тройки прямых проходят через одну точку: достаточно найти на них вершины треугольников с параллельными сторонами.



Пример

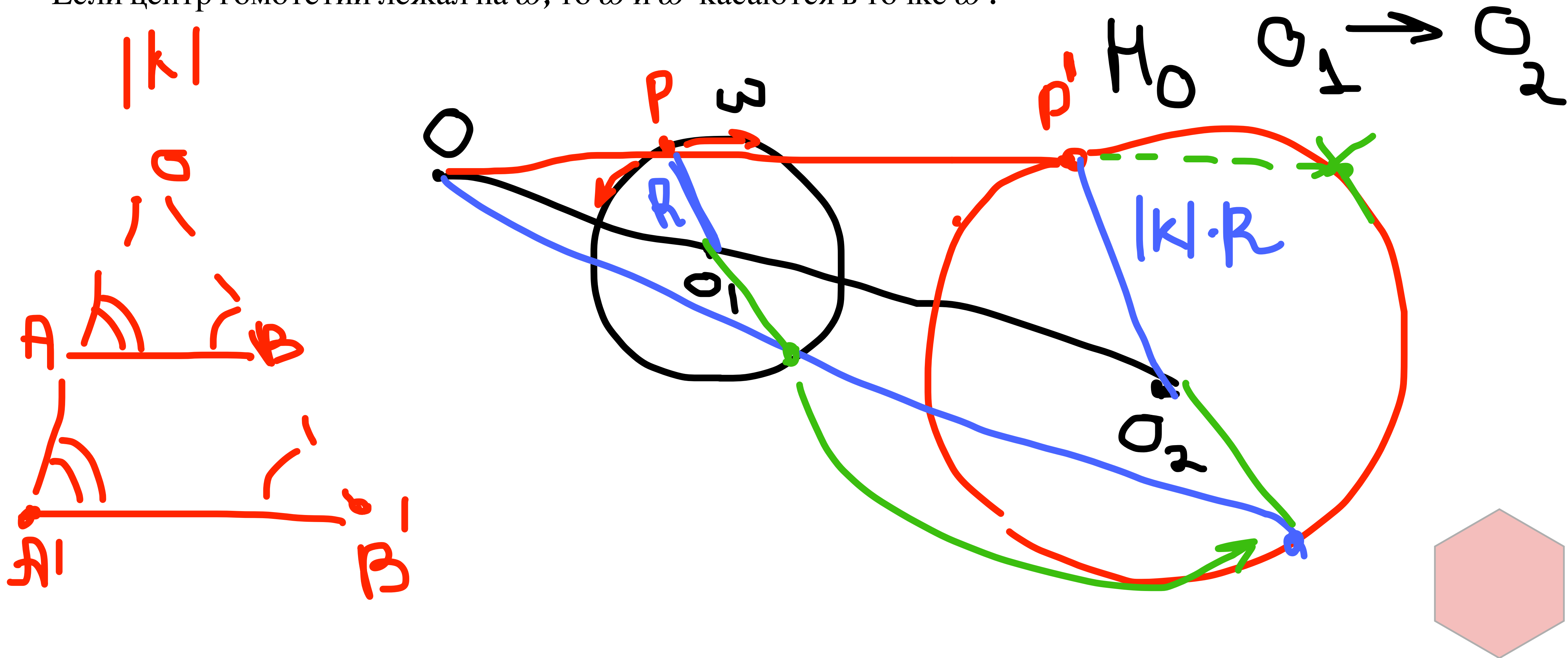
A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности с центром в точке I ; точки I_a, I_b и I_c — центры внеписанных окружностей касающихся сторон BC, AC и AB



Свойство №3

Образ окружности ω с центром O при гомотетии H_O^k — окружность ω' с центром $H_O^k(O_1)$.

Если центр гомотетии лежал на ω , то ω и ω' касаются в точке ω' .



Пример: окружность 9 точек

