

Неравенства 2. Лекция.

Неравенство Мюрхеда. (*Вспоминаем*). Пусть $\alpha > \beta$. Тогда для любых положительных чисел

$$T_{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq T_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Неравенство Шура. Для произвольных неотрицательных действительных чисел x, y, z, t выполняется неравенство:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Весовое неравенство о средних. Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и неотрицательных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ верно неравенство:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \geq (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}$$

Неравенство Гёльдера. (для рациональных) Даны рациональные числа $p, q \geq 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Тогда для положительных $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ выполнено неравенство:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Полезное неравенство. Для любых трех наборов $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ положительных чисел верно неравенство:

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n)^3$$

1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(a+b-c)^2}{ab} + \frac{(b+c-a)^2}{bc} + \frac{(c+a-b)^2}{ca} \geq 3.$$

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=3$. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq 1$$

3. Пусть $ab+bc+ac=1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Неравенства 2. Семинар.

1. Сумма неотрицательных чисел x, y и z равна 1. Докажите неравенство

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

2. Для любых положительных a, b, c докажите

$$(a^2 + b^2 + ab)(b^2 + c^2 + bc)(c^2 + a^2 + ca) \geq (ab + bc + ca)^3$$

3. Положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c=\frac{3}{2}$ Докажите, что

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

4. Пусть $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^5(b+c)^2} + \frac{1}{b^5(c+a)^2} + \frac{1}{c^5(a+b)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

5. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq 1.$$

6. Даны неотрицательные вещественные x, y, z , что $x+y+z=3$. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+2xz}} + \sqrt{\frac{z}{1+2xy}} \geq \sqrt{3}.$$