

Множества. Лекция.

- Помогает формула включений-исключений
 - Иногда надо подсчитать подмножества или изучить их
 - Построить отображение между множествами и изучить его
1. **(Формула включения-исключения.)** Докажите справедливость равенства
- $$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = & |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\ & \vdots \\ & + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|, \end{aligned}$$
- где через $|A|$ обозначено количество элементов множества A .
2. Сколько существует несократимых дробей с числителем 2015, меньших, чем $\frac{1}{2015}$ и больших, чем $\frac{1}{2016}$?
3. Даны пятиэлементные подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k$ множества $\{1, 2, \dots, 23\}$ такие, что пересечение любых двух из них содержит не более трёх элементов. Докажите, что $k \leq 2018$.
4. Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более, чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ , равно количеству разбиений числа n в сумму не более, чем ℓ слагаемых, каждое из которых не превосходит k .
5. Дана бесконечная вправо последовательность букв русского алфавита. Известно, что в ней различных подслов длины 100 столько же, сколько различных подслов длины 101. Докажите, что последовательность периодична, возможно, с предпериодом.
6. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Множества. Семинар.

1. Мальчик Леша выписал все последовательности из 2019 нулей и единиц. Каких последовательностей получилось больше — тех, в которых чётное число единиц, или тех, в которых количество единиц нечётное?
2. *(ПИСЬМЕННО!)* Пол комнаты площадью 6 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1.
3. Даны 10 различных двузначных чисел. Докажите, что можно выделить два непересекающихся подмножества A и B этих чисел так, чтобы сумма чисел из A была равна сумме чисел из B .
4. В классе 27 учеников. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для каждого двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.
5. В комнате собралось несколько человек, говорящих на разных языках, причем общее число языков, которые знает хотя бы один из них, равно 42. На каждом из этих 42 языков в комнате разговаривает ровно 6 человек, а среди любых двух человек есть ровно 30 языков, на которых говорят они оба. Найдите, какое минимальное число человек могло быть в комнате.
6. Какое наибольшее количество различных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2013\}$ можно выбрать так, чтобы любые два различных выбранных подмножества имели ровно 2011 общих элементов?
7. В коридоре длиной 100 метров постелено 20 ковровых дорожек общей длины 1000 метров. Каково может быть наибольшее число незастеленных кусков (ширина дорожки равна ширине коридора)?
8. Докажите, что среди 2^{51} различных подмножеств 100-элементного множества можно выбрать три так, что какое-то из них лежит в объединении двух других.