

## Неравенства 1. Лекция.

**Неравенства о средних.** ( $x_1, x_2, \dots, x_n$  – положительные числа):

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

при этом любое из неравенств превращается в равенство только в случае равенства всех переменных.

**Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ).** Для любых вещественных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

**Неравенство Седракяна (КБШ для дробей).** Для положительных вещественных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$  выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + a_n}.$$

**Неравенство Мюрхеда.** Пусть  $\alpha > \beta$ . Тогда для любых положительных чисел

$$T_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq T_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Неравенство Шура.** Для произвольных неотрицательных действительных чисел  $x, y, z, t$  выполняется неравенство:

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0.$$

1. Для положительных  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Для положительных чисел  $x, y, z$  докажите неравенство

$$(x+y)(x+z)(y+z) + xyz \leq 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

3. Сумма положительных чисел  $a, b$  и  $c$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{3b^2 - a^2 - c^2} + \frac{c^2}{3c^2 - a^2 - b^2} \geq 3$$

если известно, что все знаменатели положительные.

## Неравенства 1. Семинар.

1. Для положительных  $a, b, c$  докажите, что

$$\frac{a}{b^3 c} + \frac{b}{c^3 a} + \frac{c}{a^3 b} \geq \frac{2}{b^2 + c^4} + \frac{2}{c^2 + a^4} + \frac{2}{a^2 + b^4}.$$

2. Для любых положительных чисел  $x$  и  $y$  докажите неравенство

$$(x^2 + 4)(y^2 + 4) \geq 2x(y^2 + 4) + 2y(x^2 + 4).$$

3. Для положительных чисел  $a, b, c$  и  $d$  докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

4. Пусть  $a, b, c$  и  $d$  – положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}.$$

5. Пусть  $ab + bc + ac = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

6. Сумма положительных чисел  $a, b$  и  $c$  равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2(b+1)} + \frac{1}{b^2(c+1)} + \frac{1}{c^2(a+1)} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Для положительных  $a, b, c$ , удовлетворяющих условию  $abc = 1$ , докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Докажите для положительных  $a, b, c$  докажите неравенство

$$\frac{c}{(a+b)^2} + \frac{a}{(b+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}.$$