

Квадратный трёхчлен

М. Д. Кузнецов

Яндекс.Кружок

3 октября 2025 г.

Определение

Квадратным трёхчленом называется многочлен вида:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

- x — переменная
- a, b, c — числа
- $a \neq 0$ — старший коэффициент
- b — коэффициент при x
- c — свободный член

Определение корня квадратного трёхчлена

Определение

Корнем квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называется значение x_0 переменной x , при котором значение трёхчлена равно нулю:

$$P(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = 0$$

Свойства корней: Квадратный трёхчлен может иметь:

- Два различных корня
- Один корень (кратности 2)
- Не иметь действительных корней

Приведённый квадратный трёхчлен

Определение

Приведённым (унитарным) квадратным трёхчленом называется трёхчлен со старшим коэффициентом, равным 1:

$$M(x) = x^2 + px + q$$

- p — коэффициент при x
- q — свободный член

Переход к приведённому виду с сохранением корней:

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Вывод формулы корней квадратного трёхчлена

Дано уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$

❶ Разделим обе части на a : $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

❷ Вычтем из обеих частей $\frac{c}{a}$: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

❸ Добавим и вычтем $(\frac{b}{2a})^2$: $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$

❹ Преобразуем левую часть: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

❺ Приведём правую часть к общему знаменателю: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

❻ Введём обозначение дискриминанта: $D = b^2 - 4ac$

❼ Правая часть может быть квадратом только если $D \geq 0$

❽ Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}) = 0$$

❾ Получаем формулу корней:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Нахождение корней через дискриминант

Алгоритм нахождения корней:

- ❶ Вычисляем дискриминант: $D = b^2 - 4ac$
- ❷ Определяем количество корней:
 - Если $D > 0$, то два корня
 - Если $D = 0$, то один корень ($x_1 = x_2$)
 - Если $D < 0$, то корней нет
- ❸ Находим корни по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Задача 1

Условие: Разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2025. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

Решение:

- Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня по условию
- $D = b^2 - 4ac > 0$
- Запишем дискриминант для уравнения $ax^2 + 2bx + 4c = 0$
- $D' = (2b)^2 - 16ac = 4(b^2 - 4ac) > 0$
- Значит, оно тоже имеет два корня

Задача 2

Условие: Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня.

Верно ли, что уравнение:

① $a^{2025}x^2 + b^{2025}x + c^{2025} = 0$

② $a^{2026}x^2 + b^{2026}x + c^{2026} = 0$

также имеет два корня?

Решение:

- Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня по условию
- $D = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$
- Для первого уравнения:
 - $D' = (b^{2025})^2 - 4a^{2025}c^{2025} = b^{4050} - 4a^{2025}c^{2025}$
 - $b^2 > 4ac \Rightarrow b^{4050} > 4a^{2025}c^{2025}$
- Для второго уравнения:
 - $D' = (b^{2026})^2 - 4a^{2026}c^{2026} = b^{4052} - 4a^{2026}c^{2026}$
 - $b^2 > 4ac \not\Rightarrow b^{4052} > 4a^{2026}c^{2026}$
- Контрпример: при $a = b = 1, c = -2$

Задача 3

Условие: Найдите все такие q , что при любом p уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня.

Решение:

- Запишем дискриминант: $D = p^2 - 4q > 0$
- Возьмём $p = 0$
- Получаем: $-4q > 0 \Leftrightarrow q < 0$
- Ответ: $q < 0$

Разложение на множители

При нахождении корней мы получили:

- $(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}) = 0$
- $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
- $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Формула

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- a — старший коэффициент
- x_1, x_2 — корни трёхчлена

Особые случаи:

- При $D = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
- При $D < 0$ разложение невозможно

Задача 4

Условие: Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + px + q$ равны a_1 и a_2 , а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + rx + s$ равны b_1 и b_2 . Докажите, что

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) \geq 0.$$

Решение: По условию $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)$, $g(x) = (x - b_1)(x - b_2)$
 $f(b_1) + g(a_1) = (b_1 - a_1)(b_1 - a_2) + (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) =$
 $(a_1 - b_1)(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$
 $f(b_2) + g(a_2) = (b_2 - a_1)(b_2 - a_2) + (a_2 - b_1)(a_2 - b_2) =$
 $(a_2 - b_2)(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$
 $f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) = (a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2 \geq 0$

Задача 5

Условие: Петя придумал 1013 приведённых квадратных трёхчленов $f_1, \dots, f_{1012}$, среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2025. Вася рассматривает всевозможные уравнения $f_i = f_j$ ($i \neq j$), и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи?

Решение: Рассмотрим

$$f_1(x) = x(x - 2025) = x^2 - 2025x,$$

$$f_2(x) = (x - 1)(x - 2024) = x^2 - 2025x + 2024,$$

.....

$$f_{1012}(x) = (x - 1012)(x - 1013) = x^2 - 2025x + 1012 \cdot 1013.$$

Тогда $f_i(x) - f_j(x)$ не имеет корней ни при каких $i \neq j$.

Значения в точках 0, 1, -1

Квадратный трёхчлен: $P(x) = ax^2 + bx + c$

Значения $P(x)$ в ключевых точках:

- В точке $x = 0$:
 - $P(0) = c$ (свободный член)
- В точке $x = 1$:
 - $P(1) = a + b + c$ (сумма коэффициентов)
- В точке $x = -1$:
 - $P(-1) = a - b + c$ (знакопеременная сумма коэффициентов)

Задача 6

Условие: Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.

Решение: $P(x) = x^2 + px + q$

$$P(0) = q$$

$$P(1) = 1 + p + q$$

$$P(0)P(1) = q(1 + p + q) = q + qp + q^2 = P(q)$$

Пусть t — общий корень данных многочленов, т.е.

$$0 = P(t) = P(P(P(t))) = P(P(0)) = P(q).$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2$$

Равенство трёхчленов — равенство соответствующих коэффициентов:

- $b = -x_1 - x_2$
- $c = x_1x_2$

Теорема Виета

Теорема

Для квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c = 0$ с корнями x_1 и x_2 верно:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Пример: Для уравнения $2x^2 - 5x + 2 = 0$:

- Сумма корней: $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$
- Произведение корней: $x_1 \cdot x_2 = 1$

Теорема Виета

Теорема

Для приведённого трёхчлена $x^2 + px + q = 0$ с корнями x_1 и x_2 :

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Задача 7

Условие: Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Решение: Рассмотрим квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$
По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Для положительных корней: $x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

$x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow a$ и b разных знаков

Для отрицательных корней: $x_1 < 0, x_2 < 0 \Rightarrow x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0$

$x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow a$ и b одного знака

Получили противоречие: знаки a и b должны быть одновременно и одинаковыми, и разными.

Ответ: Не существуют.

Задача 8

Условие: Квадратное уравнение $x^2 + ax + 1 = b$ имеет два целых ненулевых корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Решение: Приведём уравнение к стандартному виду:

$$x^2 + ax + (1 - b) = 0$$

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = 1 - b \end{cases}$$

Выразим $a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 x_2)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2 x_2^2 \\ &= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \end{aligned}$$

x_1 и x_2 — целые ненулевые числа, поэтому $(x_1^2 + 1) > 1$ и $(x_2^2 + 1) > 1$. Тогда $a^2 + b^2$ — произведение двух чисел, больших 1, значит, оно составное.

Задача 4 (второе решение)

Условие: Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + px + q$ равны a_1 и a_2 , а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + rx + s$ равны b_1 и b_2 . Докажите, что:

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) \geq 0$$

Решение: Рассмотрим $f(b_1) + f(b_2)$:

$$\begin{aligned} f(b_1) + f(b_2) &= (b_1^2 + pb_1 + q) + (b_2^2 + pb_2 + q) \\ &= (b_1^2 + b_2^2) + p(b_1 + b_2) + 2q \\ &= (r^2 - 2s) - pr + 2q \end{aligned}$$

Аналогично для $g(a_1) + g(a_2)$:

$$\begin{aligned} g(a_1) + g(a_2) &= (a_1^2 + ra_1 + s) + (a_2^2 + ra_2 + s) \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + r(a_1 + a_2) + 2s \\ &= (p^2 - 2q) - rp + 2s \end{aligned}$$

Сложим полученные выражения:

Задача 4 (второе решение)

Условие: Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + px + q$ равны a_1 и a_2 , а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + rx + s$ равны b_1 и b_2 . Докажите, что:

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) \geq 0$$

Решение (продолжение):

Сложим полученные выражения:

$$\begin{aligned} f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) &= (r^2 - 2s - pr + 2q) + (p^2 - 2q - pr + 2s) \\ &= r^2 + p^2 - 2pr \\ &= (p - r)^2 \end{aligned}$$

Поскольку квадрат любого числа неотрицателен, то $(p - r)^2 \geq 0$, что и требовалось доказать.

Обратная теорема Виета

Теорема

Если числа p и q таковы, что:

$$x_1 + x_2 = p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$,
а также всех уравнений вида $ax^2 - apx + aq = 0$ при $a \neq 0$.

Пример: Даны числа $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$

- Сумма: $3 + (-2) = 1$
- Произведение: $3 \cdot (-2) = -6$
- Уравнение: $x^2 - x - 6 = 0$

Проверка: Корни уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ действительно 3 и -2.

Обратная теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

- $-x_1$ и $-x_2$ — корни трёхчлена $ax^2 - bx + c$
- $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ — корни трёхчлена $cx^2 + bx + a$ при $c \neq 0$

Задача 9

Условие: Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

Решение: Пусть даны числа a, b, c . По условию:

$$a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$$

Из равенств получаем:

$$a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2$$

$$a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$$

Отсюда:

$$a - a^2 = b - b^2$$

$$b - b^2 = c - c^2$$

То есть:

$$a^2 - a = b^2 - b = c^2 - c$$

Задача 9 (продолжение)

Условие: Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

Решение (продолжение): Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x$. Это парабола, ветви направлены вверх.

Поскольку $f(a) = f(b) = f(c)$, а парабола принимает одно и то же значение не более чем в двух точках, то среди чисел a, b, c должны быть равные.

Задача 10

Условие: Существуют ли три различных действительных числа, каждое из которых в сумме с произведением двух оставшихся дает одно и то же число?

Решение: Пусть $a + bc = b + ca = c + ab = p$

Тогда:

$$a + bc = p \Rightarrow a^2 + abc = pa$$

$$b + ca = p \Rightarrow b^2 + abc = pb$$

$$c + ab = p \Rightarrow c^2 + abc = pc$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен:

$$f(x) = x^2 - px + abc$$

По построению:

$$f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

Но квадратный трёхчлен не может иметь три различных корня, следовательно, таких трёх различных чисел не существует.

Задача 11

Условие: Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$$

не равно нулю.

Решение: Рассмотрим функцию:

$$f(x) = (c - b)x^2 + b^2(x - c) - c^2(x - b)$$

По построению:

$$f(a) = a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$$

$$f(b) = 0$$

$$f(c) = 0$$

Если $f(a) = 0$, то квадратный трёхчлен $f(x)$ имел бы три корня: a, b, c , что невозможно.

Следовательно, $f(a) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Задача 12

Условие: Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

Решение: $f\left(\frac{1}{a}\right) = a\left(\frac{1}{a}\right)^2 + b\left(\frac{1}{a}\right) + c = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} + c$
 $f(c) = ac^2 + bc + c = ac \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow [f(c) \text{ и } f\left(\frac{1}{a}\right) \text{ разных знаков}] \Rightarrow ac < 0$
Тогда $\frac{c}{a} = \frac{ac}{c^2} < 0$.

По теореме Виета произведение корней трёхчлена $f(x)$ равно $\frac{c}{a}$.
Поскольку $\frac{c}{a} < 0$, то корни имеют разные знаки.