

Неравенства 1. Лекция.

Неравенства о средних. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа, тогда:

$$\sqrt[n]{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

при этом любое из неравенств превращается в равенство только в случае равенства всех переменных.

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, а $c_1, \dots, c_n$ — произвольная перестановка чисел $b_1, \dots, b_n$. Тогда выполнено неравенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ). Для любых вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Неравенство Седракяна (КБШ для дробей). Для положительных вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

1. Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

2. **Неравенство Чебышева.** Докажите, что для наборов чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ выполнено неравенство:

$$n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) \geq (a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \geq n(a_1 b_n + \dots + a_n b_1).$$

3. Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a^2}{3a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{3b^2 - a^2 - c^2} + \frac{c^2}{3c^2 - a^2 - b^2} \geq 3$$

если известно, что все знаменатели положительные.

Неравенства 1. Семинар.

1. Для положительных a, b, c докажите, что

$$\frac{a}{b^3 c} + \frac{b}{c^3 a} + \frac{c}{a^3 b} \geq \frac{2}{b^2 + c^4} + \frac{2}{c^2 + a^4} + \frac{2}{a^2 + b^4}.$$

2. Для любых положительных чисел x и y докажите неравенство

$$(x^2 + 4)(y^2 + 4) \geq 2x(y^2 + 4) + 2y(x^2 + 4).$$

3. Пусть a, b, c и d — положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

4. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

5. Для положительных a, b, c , удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Сумма положительных чисел a, b и c равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2(b+1)} + \frac{1}{b^2(c+1)} + \frac{1}{c^2(a+1)} \geq \frac{3}{2}.$$

7. Пусть $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$