

Уравнения в целых числах, лекция

Ключевые методы, которые помогают в решении уравнений в целых числах:

- Сравнение по модулю
 - Малая теорема Ферма
 - Разложение на множители
 - Неравенства
1. Существуют ли попарно различные натуральные числа m, n, p, q , что $m + n = p + q$ и $\sqrt{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt{p} + \sqrt[3]{q} > 2004$?
 2. Докажите, что найдутся четыре целых числа a, b, c, d , по модулю больших 1000000, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}$
 3. Решить в целых числах уравнение $(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y$
 4. Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $ab + cd = ac - 10bd$. Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.
 5. Найдите все пары (x, y) целых чисел, такие, что $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$
 6. Найдите все пары (a, b) целых чисел $a, b \geq 1$, удовлетворяющих уравнению $a^{b^2} = b^a$

Уравнения в целых числах. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 30 апреля

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. Решите в целых числах: $x + y + xy = 40$
2. Решите в целых числах: $5xy + y - 5x = 1038$
3. Решите в целых числах: $y^2 = 5 + 9x$
4. Решите в целых числах: $x^2 - 5y^2 = 3$

Продвинутый уровень.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1000}$?
6. Решите в целых числах: $xy^2 - xy - y^2 + y = 94$
7. Решите в целых числах: $x^2 = y^3 + 7$
8. Решите в целых числах: $2^x + 3^y = z^2$