

Раскраски графов, лекция

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром.

1. (а) Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k , можно раскрасить в $k+1$ цвет так, чтобы не было двух одноцветных вершин, соединённых ребром.
(б) Докажите, что вершины графа, в котором степень каждой вершины не более k , можно раскрасить в $k^2 - k + 1$ цвет так, чтобы ни у какой вершины не было двух одноцветных соседей.
2. Дан граф на 1000 вершинах, степени всех вершин которого не превосходят 10. Докажите, что на его рёбрах можно расставить стрелки, чтобы каждый простой путь содержал не более 10 рёбер.
3. В графе 1000 вершин, причём степень каждой не больше 9. Докажите, что можно выбрать такой подграф на 200 вершинах, что в нём не будет нечётных циклов.
4. Вершины графа нельзя раскрасить правильным образом в d цветов. Докажите, что можно выбрать несколько вершин в этом графе, чтобы каждая из выбранных была соединена хотя бы с d из выбранных.
5. Докажите, что ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d рёбер, можно правильно раскрасить в $2d + 1$ цвет.
6. В городе несколько площадей. Некоторые пары площадей соединены улицами с односторонним движением так, что с каждой площади можно выехать ровно по двум улицам. Докажите, что город можно разделить на 1014 районов так, чтобы улицами соединялись только площади из разных районов, и для каждого двух районов все соединяющие их улицы были направлены одинаково (либо все из первого района во второй, либо наоборот).

Раскраски графов. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 30 апреля

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. Дан граф на n пронумерованных вершинах. Известно, что его можно правильно покрасить в 11 цветов единственным (с точностью до перенумерации цветов) образом. Докажите, что в нём не менее $5n$ рёбер.
2. Рёбра графа покрашены в два цвета так, что не существует одноцветных нечётных циклов. Докажите, что вершины графа можно правильным образом покрасить в 4 цвета.
3. Степень любой вершины графа не превосходит d . Докажите, что вершины этого графа заведомо можно покрасить в $d^2 + 1$ цвет так, чтобы расстояние между любыми двумя вершинами одинакового цвета было больше двух. (Расстоянием между двумя вершинами графа называется число рёбер в самом коротком пути, соединяющем эти две вершины.)

Продвинутый уровень.

4. (а) В графе не более $2n - 2$ вершин и нет треугольников. Докажите, что граф можно правильным образом покрасить в n цветов.
(б) В графе нет треугольников, а среди любых n рёбер есть два, выходящих из одной вершины. Докажите, что граф можно правильным образом покрасить в n цветов.
5. Дан связный граф. Известно, что как ни покрась его вершины в n цветов, найдётся ребро с концами одного цвета. Докажите, что можно так удалить $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер, чтобы граф остался связным.
6. В некотором графе нет простого пути из 100 рёбер. Докажите, что его вершины можно покрасить в 100 цветов правильным образом.