

Подобные конфигурации. Лекция.

Что бывает полезного в подобии:

- Подобные треугольники
 - Подобные четырехугольники
 - Подобные треугольники с подобными соответствующими элементами
 - Подобные конструкции с окружностями
1. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведены одна внешняя и одна внутренняя касательные. Рассмотрим две прямые, каждая из которых проходит через точки касания, принадлежащие одной из окружностей. Докажите, что точка пересечения этих прямых расположена на прямой, соединяющей центры окружностей.
 2. Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K , а вторая продолжение стороны CD в точке L . Пусть F – точка пересечения KL и AC . Докажите, что $BF \perp KL$.
 3. Окружность ω касается внутренним образом окружности Ω в точке C . Хорда AB окружности Ω касается ω . Хорды CF и BG окружности Ω пересекаются в точке E , лежащей на ω . Докажите, что окружность, описанная около треугольника CGE , касается прямой AF .
 4. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки H и O – его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к отрезку BH пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1 . Докажите, что OB – биссектриса угла A_1OC_1 .
 5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC лучи AB и DC пересекаются в точке K . Точки P и Q – центры описанных окружностей треугольников ABD и BCD . Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

Подобные конфигурации. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 12 февраля

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Описанная окружности треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD , в точке K . Точка M – середина BC , N – середина AD . Докажите, что точки K , N , M и B лежат на одной окружности.
2. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BH на диагональ AC . Точки M и N – середины отрезков AH и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.
3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $AM = CN$, Q – точка пересечения отрезков AN и CM . Докажите, что DQ – биссектриса угла D .

Продвинутый уровень.

4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка P , что $\angle PBA = \angle PCD = 90^\circ$. Точка M – середина стороны AD , причём $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$.
5. Точка P выбрана внутри треугольника ABC , прямые AP и CP пересекают окружность (ABC) в точках Q и R . Докажите, что можно провести касательную из точки A к окружности (PBR) и касательную из точки C к окружности (PBQ) так, чтобы они пересеклись на окружности (ABC) .
6. В остроугольном треугольнике ABC , $AB < AC$, провели медиану AM и высоту BH . Касательные к окружности (ABC) , проведенные в точках A и B , пересекаются в точке T . Окружность (BMT) повторно пересекает (ABC) в точке S . Докажите, что окружность (SAH) касается прямой AB .
7. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки E и F соответственно. Докажите, что (ABF) касается прямой ED тогда и только тогда, когда (ECD) касается прямой BF .