

Теорема Форда-Фалкерсона, лекция

Определение. Пусть задано множество вершин V , среди которых выделено две: *вход* s и *выход* t . Пусть задана функция $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$c(x, y) \geq 0, \quad c(x, s) = 0, \quad c(t, y) = 0.$$

Тогда четвёрка $G = (V, s, t, c)$ называется *сетью*, а функция c — *пропускной способностью* этой сети.

Определение. Если функция $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

1. $f(x, y) \leq c(x, y)$,
2. $f(x, y) = -f(y, x)$,
3. если $x \neq s$ и $x \neq t$, то $\sum_{y \in V} f(x, y) = 0$,

то f называется *поток*ом в сети G . Значение $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$ называется *величиной* потока. Поток называется *максимальным*, если его величина максимальна.

Определение. Пусть множество V разбито на две части S и T , причём $s \in S$, $t \in T$. Тогда пару (S, T) будем называть *разрезом* сети G . *Потоком через разрез* (S, T) будем называть величину $f(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} f(x, y)$. *Пропускной способностью разреза* (S, T) — величину $c(S, T) = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y)$. Разрез называется *минимальным*, если его пропускная способность минимальна.

Определение. Для потока f в сети G определим *остаточную сеть* G_f с теми же множеством вершин, входом и выходом, пропускная способность которой задана следующим образом: $c_f(x, y) = c(x, y) - f(x, y)$.

Определение. Проведём на множестве вершин V ориентированные рёбра из x в y для всех пар (x, y) таких, что $c_f(x, y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путём* потока f .

1. Докажите, что для любого потока f и разреза (S, T) выполнено $|f| = f(S, T)$.
2. **Теорема Форда-Фалкерсона.** Пусть в сети G с пропускной способностью c задан поток f . Тогда следующие утверждения эквивалентны:
 1. Поток f — максимальный.
 2. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.
 3. Существует разрез (S, T) такой, что $f(S, T) = c(S, T)$.

3. **Теорема Холла.** Пусть дан двудольный граф с левой и правой долями. Тогда существует паросочетание, покрывающее все вершины левой доли, тогда и только тогда, когда для любого подмножества вершин левой доли количество их соседей в правой доле не меньше размера этого подмножества.

Теорема Форда-Фалкерсона. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 14 мая

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. Пусть пропускная способность каждого ребра — целое число. Докажите, что в сети есть максимальный целочисленный поток (т.е. поток через каждое ребро — целый).
2. В таблице $m \times n$ в каждой клетке записано некоторое число так, что сумма чисел в каждом столбце и сумма чисел в каждой строке является целым числом. Докажите, что каждое число можно округлить до какого-то целого (изменив менее чем на 1) так, чтобы сумма в каждом столбце и сумма в каждой строке не изменилась.

Продвинутый уровень.

3. **Теорема Кёнига.** Пусть в двудольном графе G любое паросочетание имеет размер не более k . Тогда можно выбрать k вершин таких, что любое ребро графа имеет конец среди выбранных вершин.
4. **Теорема Менгера.** Даны граф G и две его вершины u и v .
 - (a) Пусть u и v остаются в одной компоненте связности при выкидывании любых $(n - 1)$ рёбер. Тогда существуют n рёберно непересекающихся путей из u в v .
 - (b) Пусть u и v остаются в одной компоненте связности при выкидывании любых $(n - 1)$ вершин. Тогда существуют n вершинно непересекающихся путей из u в v (путей, у любых двух из которых общими вершинами являются только u и v).