

Задача 255, лекция

1. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC , K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой MN . Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.
2. Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной стороне AB .
3. Случаи вневписанных окружностей.
 - (a) Пусть M и N — точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон BC и BA треугольника ABC , K — точка пересечения биссектрисы внешнего угла A с прямой MN . Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.
 - (b) Докажите, что точка K лежит на средней линии треугольника ABC , параллельной стороне AB .
4. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон BC , AC и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB .
5. Дан треугольник ABC с серединами сторон M_a, M_b и M_c . Вписанная окружность касается сторон в точках K_a, K_b и K_c . Пусть AH_a — высота, N_a — точка касания вневписанной окружности с отрезком BC , а P и Q — проекции вершин B и C на биссектрису угла A . Докажите, что
 - (a) точки P, Q, K_a и N_a лежат на одной окружности;
 - (b) точки P, Q, M_a и H_a лежат на одной окружности.
6. К двум окружностям проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности, и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров этих окружностей.

Задача 255. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 14 мая

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. В треугольнике ABC опущены перпендикуляры BM и BN на биссектрисы углов A и C , а также перпендикуляры BP и BQ на внешние биссектрисы этих же углов. Докажите, что: а) точки M, N, P и Q лежат на одной прямой; б) длина отрезка PQ равна полупериметру треугольника ABC .
2. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 и отмечены точки K и L — середины сторон AB и BC соответственно. AP и CQ — перпендикуляры, опущенные на CC_1 и AA_1 соответственно. Докажите, что прямые PK и QL пересекаются на стороне AC .
3. Окружность с центром O вписана в четырёхугольник $ABCD$ и касается его непараллельных сторон BC и AD в точках E и F соответственно. Пусть прямая AO и отрезок EF пересекаются в точке K , прямая DO и отрезок EF — в точке N , а прямые BK и CN — в точке M . Докажите, что точки O, K, M и N лежат на одной окружности.

Продвинутый уровень.

4. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны BC за точку C выбирается точка X . Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX , пересекаются в точках P и Q . Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X .
5. В треугольнике ABC ($AB > BC$) K и M — середины сторон AB и AC , O — точка пересечения биссектрис. Пусть P — точка пересечения прямых KM и CO , а точка Q такова, что $QP \perp KM$ и $QM \parallel BO$. Докажите, что $QO \perp AC$.
6. В треугольнике ABC AM — медиана, AL — биссектриса, K — такая точка на AM , что $KL \parallel AC$. Докажите, что $AL \perp KC$.