

Инверсия, лекция

Определение. Пусть ω – окружность с центром O и радиусом R . Рассмотрим преобразование плоскости, которое сопоставляет точке P точку P' , лежащую на луче OP и удовлетворяющую свойству $OP \cdot OP' = R^2$. Такое преобразование называется *инверсией* (симметрией) относительно окружности ω . Точка O называется центром инверсии.

Замечание. Легко понять, что инверсия является **инволюцией** на плоскости. Если применить инверсию относительно одной окружности дважды, то мы получим тождественное преобразование

При таком определении образ центра инверсии не определен. Чтобы инверсия была определена в точке O мы дополним плоскость бесконечно удаленной точкой ∞ и будем считать, что при инверсии $O \rightarrow \infty, \infty \rightarrow O$.

Определение. Прямые и окружности на пополненной плоскости будем называть *обобщенными окружностями*. Углом между пересекающимися обобщенными окружностями называется угол между касательными к ним, проведенными в точке их пересечения.

1. Пусть A и A' , B и B' – две пары точек, инверсных относительно окружности ω с центром O . Тогда $\angle OAB = \angle OB'A'$.
2. Дана окружность ω с центром O . Докажите, что следующие построения выдают точку, инверсную P :
 - (а) (если P лежит вне окружности) Проведите касательные PA и PB к ω . Точка P' – середина AB .
 - (б) Теперь постройте инверсный образ P циркулем и линейкой во всех случаях.
3.
 - (а) Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.
 - (б) Эта прямая является радикальной осью своего образа и окружности инверсии.
 - (в) Окружность, не проходящая через центр инверсии, перейдет в окружность, не проходящую через центр инверсии, причем эти две окружности гомотетичны относительно центра инверсии.
4. Инверсия сохраняет углы между обобщенными прямыми.
5. Найдите все (а) прямые; (б) окружности являющиеся неподвижными при инверсии.
6. Через точку A к окружности ω с центром в точке O проведены касательные AX и AU , а также секущая, пересекающая окружность в точках B и C . Докажите, что точки B, C, O и середина отрезка XU лежат на одной окружности.

Инверсия. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 12 марта

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. Даны четыре окружности, причем первая касается второй, вторая третьей, третья четвертой, а четвертая первой. Все касания внешние. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.
2.
 - (а) Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A' , а точка B переходит в B' . Докажите, что $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$, где R – радиус инверсии.
 - (б) **Неравенство Птолемея.** Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCD$ $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$, при этом равенство достигается только в случае вписанного четырехугольника (сделайте инверсию в A).
3. Две окружности пересекаются в точке A . К ним проведены две общие внешние касательные BC и DE . Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и ADE касаются.

Продвинутый уровень.

4. **(Лемма Архимеда)** В окружности ω проведена хорда AB . Окружность γ касается ω в точке C , а отрезка AB в точке D . Точка M — середина дуги AB окружности ω , не содержащей точку C . Докажите, что точки C, D, M лежат на одной прямой, сделав инверсию
 - (а) с центром в точке C и произвольным радиусом;
 - (б) с центром в точке M и радиусом AM ;
 - (в) с центром в точке A и произвольным радиусом.
5. Пусть p – полупериметр треугольника ABC . Точки E и F на прямой BC таковы, что $AE = AF = p$. Докажите, что описанная окружность треугольника AEF касается внеписанной окружности треугольника ABC со стороны BC .