

Многочлены. Лекция.

Ключевые методы, которые помогают в решении задач на многочлены:

- Подстановка
 - Теорема Безу
 - Теорема Виета
1. Дано натуральное число n . Можно ли представить многочлен $x(x-1)\dots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами?
 2. Пусть a, b, c, d, e, f - это вещественные числа такие, что многочлен
$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$
раскладывается на линейные множители $x - x_i$, где $x_i > 0$ для $i = 1, 2, \dots, 8$. Найдите все возможные значения f .
 3. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $P(P(x) + x)$ является простым числом при бесконечном количестве целых x .
 4. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$, не обязательно с целыми коэффициентами. Известно, что при некоторых целых a и b разность $P(a) - P(b)$ является квадратом натурального числа. Докажите, что существует более миллиона таких пар целых чисел (c, d) , что разность $P(c) - P(d)$ также является квадратом натурального числа.
 5. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет решений в целых числах. Докажите, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ тоже не имеет решений в целых числах.

Многочлены. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 5 марта

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. Коэффициентами многочленов нечётной степени P и Q являются нечётными числами. Докажите, что у многочлена $P \cdot Q$ есть хотя бы один чётный коэффициент.
2. Приведённый многочлен $P(x)$ степени $n + 1$ имеет корни $1, 2, \dots, n$, а также $P(n + 1) = n!$. Найдите $P(n + 2)$.
3. Многочлен $P(x) - a$ и многочлен $P(P(x) - b)$ имеют как минимум один общий корень. Докажите, что число $a - b$ является корнем многочлена $P(x)$.

Продвинутый уровень.

4. Пусть $P(x)$ - многочлен 10-ой степени такой, что $P(i) = P(-i)$ для $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Докажите, что для любого x выполнено $P(x) = P(-x)$.
5. Пусть n - натуральное число. На $2n + 1$ карточках написаны ненулевые целые числа, причем их сумма также ненулевая. Требуется заменить звездочки в выражении $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \dots + *x + *$ этими карточками так, чтобы полученный многочлен не имел целых корней. Обязательно ли это можно сделать?
6. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где n натуральное число. Известно, что числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ целые, при этом $a_n = a_0, a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \dots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2030)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.