

Дискриминант

Квадратное уравнение — это уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{где } a \neq 0.$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right), \quad \text{где } D = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right), \quad \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{4a^2}$$

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни $\Leftrightarrow D \geqslant 0$.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

Задача 1

Известно, что разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна 2025. Сколько корней имеет уравнение $ax^2 + 2bx + 4c = 0$?

Решение:

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня по условию.

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

Запишем дискриминант для уравнения $ax^2 + 2bx + 4c = 0$

$$D' = (2b)^2 - 16ac = 4(b^2 - 4ac) > 0.$$

Значит, оно тоже имеет два корня.

Задача 2

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня. Верно ли, что уравнение

(а) $a^{2025}x^2 + b^{2025}x + c^{2025} = 0$,

(б) $a^{2026}x^2 + b^{2026}x + c^{2026} = 0$,

также имеет два корня?

Решение:

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня по условию.

$$D = b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 > 4ac$$

(а) Запишем дискриминант для уравнения $a^{2025}x^2 + b^{2025}x + c^{2025} = 0$

$$D' = (b^{2025})^2 - 4a^{2025}c^{2025} = b^{4050} - 4a^{2025}c^{2025}.$$

$$D = b^2 > 4ac \quad \Rightarrow \quad b^{4050} > 4^{2025}a^{2025}c^{2025} > 4a^{2025}c^{2025}$$

(б) Запишем дискриминант для уравнения $a^{2026}x^2 + b^{2026}x + c^{2026} = 0$

$$D' = (b^{2026})^2 - 4a^{2026}c^{2026} = b^{4052} - 4a^{2026}c^{2026}$$

$$D = b^2 > 4ac \quad \nRightarrow \quad b^{4052} > 4^{2026}a^{2026}c^{2026} > 4a^{2025}c^{2025}$$

Контрпример: когда $ac < 0$, например, $a = b = 1$, $c = -2$.

Задача 3

Найдите все такие q , что при любом p уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня.

Решение:

Запишем дискриминант для уравнения $x^2 + px + q = 0$.

$$D = p^2 - 4q > 0$$

Возьмём $p = 0$, тогда

$$-4q > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q < 0$$

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{где } a \neq 0.$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right), \quad \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

Если $D \geqslant 0$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \right) = \\ &= a \left(x + \frac{b - \sqrt{D}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{D}}{2a} \right) = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) \end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{где } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Задача 4

Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + px + q$ равны a_1 и a_2 , а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + rx + s$ равны b_1 и b_2 . Докажите, что

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) \geq 0.$$

Попытка решить «в лоб»:

По условию

$$f(a_1) = a_1^2 + pa_1 + q = 0, \quad f(a_2) = a_2^2 + pa_2 + q = 0$$

$$g(b_1) = b_1^2 + rb_1 + s = 0, \quad g(b_2) = b_2^2 + rb_2 + s = 0.$$

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) = (b_1^2 + pb_1 + q) + (b_2^2 + pb_2 + q) + (a_1^2 + ra_1 + s) + (a_2^2 + ra_2 + s)$$

$$f(b_1) = b_1^2 + pb_1 + q = (b_1^2 + rb_1 + s) + (p - r)b_1 + (q - s) = (p - r)b_1 + (q - s)$$

$$f(b_1) + f(b_2) = (p - r)(b_1 + b_2) + 2(q - s)$$

$$g(a_1) = a_1^2 + ra_1 + s = (a_1^2 + pa_1 + q) + (r - p)a_1 + (s - q) = (r - p)a_1 + (s - q)$$

$$g(a_1) + g(a_2) = (r - p)(a_1 + a_2) + 2(s - q)$$

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) = (p - r)(b_1 + b_2 - a_1 - a_2).$$

Решение:

$$\text{По условию } f(x) = (x - a_1)(x - a_2), \quad g(x) = (x - b_1)(x - b_2)$$

$$f(b_1) + g(a_1) = (b_1 - a_1)(b_1 - a_2) + (a_1 - b_1)(a_1 - b_2) = (a_1 - b_1)(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$

$$f(b_2) + g(a_2) = (b_2 - a_1)(b_2 - a_2) + (a_2 - b_1)(a_2 - b_2) = (a_2 - b_2)(a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) = (a_1 + a_2 - b_1 - b_2)^2 \geq 0$$

Задача 5

Петя придумал 1013 приведённых квадратных трёхчлена $f_1, \dots, f_{1013}$, среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2025. Вася рассматривает всевозможные уравнения $f_i = f_j$ ($i \neq j$), и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи?

Решение:

Рассмотрим

$$f_1(x) = x(x - 2025) = x^2 - 2025x,$$

$$f_2(x) = (x - 1)(x - 2024) = x^2 - 2025x + 2024,$$

.....

$$f_{1013}(x) = (x - 1012)(x - 1013) = x^2 - 2025x + 1012 \cdot 1013.$$

Задача 6

Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.

Решение:

$$P(x) = x^2 + px + q$$

t — общий корень данных многочленов

$$P(0) = q$$

$$P(1) = 1 + p + q$$

$$P(t) = t^2 + tp + q = 0$$

$$P(q) = q^2 + qp + q$$

$$P(0)P(1) = q(p + q + 1) = pq + q^2 + q = P(q)$$

$$0 = P(P(P(t))) = P(P(0)) = P(q).$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Доказательство.

Первый способ:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Второй способ:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$bx + c = -a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$c = ax_1x_2 \text{ и } b = -a(x_1 + x_2)$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - px + q = 0,$$

$$\text{где } p = -\frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Задача 7

Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

Решение:

$$ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Корни положительные $\Rightarrow b$ и a — разных знаков, c и a — одного знака

Корни отрицательные $\Rightarrow b$ и a — одного знака, c и a — тоже одного знака

Задача 8

Квадратное уравнение $x^2 + ax + 1 = b$ имеет два целых ненулевых корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Решение:

$$x^2 + ax + 1 - b = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 x_2 = 1 - b. \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

Задача 9

Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + px + q$ равны a_1 и a_2 , а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + rx + s$ равны b_1 и b_2 . Докажите, что

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) \geq 0.$$

Решение:

$$f(b_1) + f(b_2) = b_1^2 + pb_1 + q + b_2^2 + pb_2 + q = (b_1^2 + b_2^2) + p(b_1 + b_2) + 2q = (r^2 - 2s) - pr + 2q$$

$$g(a_1) + g(a_2) = a_1^2 + rab_1 + s + a_2^2 + ra_2 + s = (a_1^2 + a_2^2) + r(a_1 + a_2) + 2s = (p^2 - 2q) - pr + 2s$$

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) = (r^2 - 2s) - pr + 2q + (p^2 - 2q) - pr + 2s = r^2 - 2pr + p^2 = (p - r)^2 \geq 0$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} a + b = p, \\ ab = q, \end{cases}$$

то эти числа являются корнями квадратного уравнения $x^2 - px + q = 0$.

Доказательство.

$$x^2 - px + q = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab = x(x - a) - b(x - a) = (x - a)(x - b).$$

$$x^2 - px + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - a)(x - b) = 0$$

Задача 10. Бонус

Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

Решение:

$a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$, то $a^2 - a = b^2 - b = c^2 - c = d$

Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 - x - d \dots$

Задача 11. Бонус

Существуют ли три различных действительных числа, каждое из которых в сумме с произведением двух оставшихся дает одно и то же число?

Решение:

$$a + bc = b + ca = c + ab = p$$

$$a^2 + abc = pa, \quad b^2 + abc = pb, \quad c^2 + abc = pc$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 - px + abc \dots$

Задача 12. Бонус

Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение

$$a^2(c - b) + b^2(a - c) + c^2(b - a)$$

не равно нулю.

Решение:

Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = (c - b)x^2 + b^2(x - c) + c^2(b - x) \dots$