

Множества. Лекция.

- Помогает формула включений-исключений
- Иногда надо подсчитать подмножества или изучить их
- Построить отображение между множествами и изучить его

1. **(Формула включения-исключения.)** Докажите справедливость равенства

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|,\end{aligned}$$

где через $|A|$ обозначено количество элементов множества A .

2. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?
3. Даны пятиэлементные подмножества $A_1, A_2, \dots, A_k$ множества $\{1, 2, \dots, 23\}$ такие, что пересечение любых двух из них содержит не более трёх элементов. Докажите, что $k \leq 2018$.
4. Петя подсчитал количество всех возможных m -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы Т, О, W и N, причём в каждом слове букв Т и О поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$ -буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы Т и О, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово – это любая последовательность букв.)
5. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Множества. Семинар.

1. Мальчик Леша выписал все последовательности из 2019 нулей и единиц. Каких последовательностей получилось больше — тех, в которых чётное число единиц, или тех, в которых количество единиц нечётное?
2. *(ПИСЬМЕННО!)* Пол комнаты площадью 6 покрыт тремя коврами, площадь каждого из которых равна 3. Докажите, что какие-то два из этих ковров перекрываются по площади, не меньшей 1.
3. Даны 10 различных двузначных чисел. Докажите, что можно выделить два непересекающихся подмножества A и B этих чисел так, чтобы сумма чисел из A была равна сумме чисел из B .
4. В классе 27 учеников. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для каждого двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимаются не менее 18 учеников.
5. В комнате собралось несколько человек, говорящих на разных языках, причем общее число языков, которые знает хотя бы один из них, равно 42. На каждом из этих 42 языков в комнате разговаривает ровно 6 человек, а среди любых двух человек есть ровно 30 языков, на которых говорят они оба. Найдите, какое минимальное число человек могло быть в комнате.
6. Какое наибольшее количество различных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2013\}$ можно выбрать так, чтобы любые два различных выбранных подмножества имели ровно 2011 общих элементов?
7. В коридоре длиной 100 метров постелено 20 ковровых дорожек общей длины 1000 метров. Каково может быть наибольшее число незастеленных кусков (ширина дорожки равна ширине коридора)?