

Степень точки и радикальные оси

12 декабря 2025 г.

1. Докажите формулу $d^2 - R^2$ для степени точки P в случае, когда P внутри окружности (покажите, что это равно произведению отрезков секущих, взятому со знаком минус).
2. В треугольнике ABC проведена высота BH . Из точки H опущены перпендикуляры HX и HY на стороны AB, BC . Докажите, что A, C, X, Y лежат на одной окружности.
3. Докажите, что радикальная ось двух окружностей, построенных на чевианах треугольника как на диаметрах, проходит через ортоцентр треугольника.
4. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины меньших дуг BC, AC и AB описанной окружности остроугольного $\triangle ABC$. Точка I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника $\triangle ABC$. Точка B^* на прямой AC такова, что $B^*I \perp BI$. Аналогично определяются точки A^* и C^* . Докажите что:
 - (а) B^* лежит на радикальной оси описанной окружности $\triangle AIC$ и окружности, построенной как на диаметре на отрезке BI
 - (б) B^* лежит на радикальной оси описанной окружности $\triangle ABC$ и точки I (точка — окружность нулевого радиуса)
 - (в) A^*, B^* и C^* лежат на одной прямой, перпендикулярной OI (O — центр описанной окружности остроугольного $\triangle ABC$)
5. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.