

Ортоцентр: семинар

Всюду ниже дан остроугольный треугольник ABC , его ортоцентр обозначен через H , центр описанной окружности Ω — через O , проведены высоты AH_a , BH_b и CH_c , которые пересекают Ω в точках A_1 , B_1 и C_1 . Середины AB , BC и CA обозначены через M_c , M_a и M_b соответственно. Отрезки AA_0 , BB_0 и CC_0 — диаметры Ω .

В задачах ниже **НУЖНО** использовать **не более** двух углов, один из которых прямой.

- Докажите, что (а) BH_cH_bC — вписанный; (б) AH_cH_aC — вписанный.
(в) Найдите все аналогичные им вписанные четырехугольники, вершины которых есть среди точек H_a , H_b , H_c , A , B , C , H .
- Докажите, что (а) $\angle AH_cH_b = \angle ACB$
(б) касательная в точке A к Ω параллельна H_bH_c ; (в) $AO \perp H_bH_c$.
- Докажите, что (а) $AC \perp A_0C$ и $A_0C \parallel BH$
(б) Докажите, что A_0 — симметрична H относительно M_a . Напоминание: говорят, что X_1 симметрична X относительно M , если M — середина отрезка XX_1 .
- (а) Докажите, что A_1 симметрична H относительно BC . Напоминание: говорят, что X_1 симметрична X относительно l , если l — серединный перпендикуляр к XX_1 .
(б) **Изогональное свойство ортоцентра.** Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.
В задачах ниже **можно** использовать результаты задач 3-4.
- Докажите, что $OM_a = \frac{1}{2}AH$.
- Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Пусть H_B — ортоцентр ABD , H_C — ортоцентр ACD . Докажите, что $H_BH_C \parallel BC$.