

Неравенства 2. Лекция.

Весовое неравенство о средних. Для положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ и неотрицательных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ верно неравенство:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \geqslant (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n})^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}$$

Неравенство Гёльдера. (для рациональных) Даны рациональные числа $p, q \geqslant 1$ такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Тогда для положительных $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ выполнено неравенство:

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leqslant (a_1^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Полезное неравенство. Для любых трех наборов $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ положительных чисел верно неравенство:

$$(a_1^3 + \dots + a_n^3)(b_1^3 + \dots + b_n^3)(c_1^3 + \dots + c_n^3) \geqslant (a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n)^3$$

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geqslant 1$$

2. Пусть $ab + bc + ac = 1$. Докажите, что

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Неравенства 2. Семинар.

1. Для любых положительных a, b, c докажите

$$(a^2 + b^2 + ab)(b^2 + c^2 + bc)(c^2 + a^2 + ca) \geqslant (ab + bc + ca)^3.$$

2. Положительные числа a, b и c таковы, что $a + b + c = \frac{3}{2}$ Докажите, что

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$

3. Пусть $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^5(b+c)^2} + \frac{1}{b^5(c+a)^2} + \frac{1}{c^5(a+b)^2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geqslant 1.$$

5. Даны неотрицательные вещественные x, y, z , что $x + y + z = 3$. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{x}{1+2yz}} + \sqrt{\frac{y}{1+2xz}} + \sqrt{\frac{z}{1+2xy}} \geqslant \sqrt{3}.$$