

Гомотетия, лекция

На плоскости дана точка S и зафиксировано вещественное число $k \neq 0$. Гомотетией с центром в точке S и коэффициентом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в точку A' на прямой SA такую, что $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.

1. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне неё построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
2. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A ; окружность ω_b касается прямой b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .
3. Треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$. Докажите, что существует гомотетия или параллельный перенос, переводящий один треугольник в другой.
4. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается отрезка BC в точке D , а также касается внутренним образом в точке A описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямая AD делит дугу BC описанной окружности треугольника ABC (не содержащую точку A) пополам.
5. Окружности ω и ω_A — вписанная и невписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A ; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A .
6. К плоскости прибиты гвоздями окружность ω , точка A на ней и точка T внутри неё. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Докажите, что локусом точек пересечения медиан ABC служит некоторая окружность.
7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что и радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины A тоже равны.

Гомотетия. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 27 апреля

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

1. Пусть в окружности ω проведена хорда AB , и ещё одна окружность касается ω в точке C и отрезка AB в точке D . Тогда прямая CD проходит через середину дуги AB , не содержащей точки C .
2. К плоскости прибиты гвоздями окружность ω , точка A на ней и точка T внутри неё. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Докажите, что локусом ортоцентров всевозможных треугольников ABC служит некоторая окружность.
3. К двум непересекающимся окружностям ω_A и ω_B проведена общая касательная AB , причём $A \in \omega_A$, $B \in \omega_B$. Окружность, построенная на AB как на диаметре, повторно пересекает ω_A в точке A' , ω_B в точке B' . Докажите, что прямые AB' и $A'B$ пересекаются на линии центров ω_A и ω_B .

Продвинутый уровень.

4. На плоскости проведены параллельные прямые l_1 и l_2 . Окружности ω_1 и ω_2 лежат между этими прямыми. Окружность ω_1 касается l_1 в точке A , окружность ω_2 касается l_2 в точке B , окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке C . Докажите, что точки A , B , C лежат на одной прямой.
5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его стороны AC в точке P и имеет центр I . Концентрическая с ней окружность пересекает все его стороны. Те её точки пересечения со сторонами AB и BC , что ближе к вершине B , назовём K и L соответственно. А точки её пересечения со стороной AC назовём M и N , причём M ближе к A , чем N . Докажите, что прямые KN , LM и BP пересекаются в одной точке.
6. Пусть точка I — центр вписанной окружности, а M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Точки M_a , M_b , M_c — точки пересечения медиан треугольников BIC , CIA , AIB соответственно. Докажите, что M — центр вписанной окружности треугольника $M_aM_bM_c$.