Единственность в геометрии

Важная мысль. Как доказываются признаки равенства треугольников?

Полезное соображение №1.

а) Если дано условие A, которое однозначно задаёт картинку, а доказать требуется утверждение B, то достаточно показать, что из B следует A.

б) Чтобы доказать, что существует объект (окружность, прямая), обладающий свойством A, достаточно построить объект B, обладающий этими свойствами и показать, что A задаёт объект однозначно.

Классические леммы о единственности:

- на данной прямой AB есть единственная точка C, что $AC^2 - BC^2 = k$, где $k > 0$ — некоторая константа;
- на данном отрезке AB есть единственная точка C, что $\dfrac{AC}{CB} = k$, где $k > 0$ — некоторая константа;
- на части прямой AB, не содержащей отрезок AB, есть единственная точка C, что $\dfrac{AC}{CB} = k$, где $k > 0$ — некоторая константа;
- для заданной точки A есть ровно две точки B_1 и B_2 на прямой ℓ (по одной с каждой стороны от точки H — проекции A на ℓ), что $AB_1 = AB_2 = k$, где $k > AH$ — некоторая константа;
- для заданной точки A есть ровно две точки B_1 и B_2 на прямой ℓ (по одной с каждой стороны от точки H — проекции A на ℓ), что $\angle AB_1H = \angle AB_2H = \alpha$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ — некоторая константа;
- на заданной прямой ℓ, пересекающей отрезок AB, есть ровно две точки C_1 и C_2 (по одной в каждой полуплоскости от AB), что $\angle AC_1B = \angle AC_2B = \alpha$, где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ — некоторая константа.

Полезное соображение №2.

а) Чтобы доказать, что три прямые/окружности/прямые и окружности пересекаются в одной точке, достаточно показать, что точка пересечения некоторых двух из них лежит на третьей.

б) Чтобы доказать, что три точки лежат на одной прямой, достаточно показать, что прямая, проходящая через некоторые две из них, проходит и через третью.

Полезное соображение №3. Пусть требуется проверить, что точка пересечения некоторых прямых $X = \ell_1 \cap \ell_2 (\cap \ell_3 \dots)$ лежит на прямой PQ. Тогда достаточно пересечь прямую PQ с одной из прямых ℓ_i в точке X' и доказать, что X' делит некоторый отрезок AB, лежащий на прямой ℓ_i, в том же отношении, что и X.

Полупризнак равенства треугольника. В треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены следующие соотношения:

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle ABC = \angle A_1B_1C_1.$$

Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ или $\angle ACB + \angle A_1C_1B_1 = 180^\circ$.

Приведение к единственности. Примеры достаточных условий, которые превращают полупризнак равенства треугольников в признак равенства:

- треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ остроугольные;
- $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \geqslant 90^\circ$;
- AB и A_1B_1 не наибольшие стороны соответствующих треугольников.

1. **Обратная теорема о биссектрисе.** На стороне AC треугольника ABC выбрана такая точка L, что $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{AB}{BC}$. Докажите, что BL — биссектриса $\angle ABC$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка O, причем $\angle OAB = \angle OBA = 15^\circ$. Докажите, что треугольник OCD — равносторонний.

3. Точки M и N делят основание AC равнобедренного треугольника ABC с углом $B = 120^\circ$ на три равные части. Докажите, что треугольник MBN — равносторонний.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка пересечения диагоналей является серединой диагонали AC. Известно, что $\angle ABC = \angle ADC$. Верно ли, что $ABCD$ обязательно является параллелограммом?

5. На высоте BB_1 остроугольного треугольника ABC $\angle B = 60^\circ$ взята точка H так, что $\angle AHC = 120^\circ$. Докажите, что H — ортоцентр треугольника ABC.

6. В треугольнике ABC — проведена медиана BD, а на продолжении стороны BC за точку B отмечена точка F. Прямая FD пересекает сторону AB в точке E, причём площади треугольников FBE и AED оказались равные. Докажите, что равны площади треугольников FEC и AEC.

7. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM.