

Целочисленные оценки

14 января 2026 г.

1. p и q — последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что число $\frac{p+q}{2}$ является составным числом.
2. Натуральные числа a и b — делители натурального числа n . Докажите, что если $a > b$, то $a > b + \frac{b^2}{n}$.
3. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — натуральные числа. Докажите, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq n \cdot a_1$$

4. Найдите все натуральные числа a , b и c такие, что $\frac{(ab-1)(ac-1)}{bc}$ является квадратом целого числа.
5. Пусть a и b — некоторые положительные числа. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ число $\sqrt{an+b}$ округлили до ближайшего целого. Могли ли все округления быть в одну сторону?
6. Даны натуральные числа a, b и c , ни одно из которых не является делителем другого. Известно, что $\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, c) + \text{НОК}(a, c) + 1$. Докажите, что $c < b \leq \frac{3}{2}c$.
7. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2)} + \frac{1}{\text{НОК}(a_2, a_3)} + \dots + \frac{1}{\text{НОК}(a_{n-1}, a_n)} < 1.$$

8. Обозначим через $S(m)$ сумму цифр натурального числа m . Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что

$$S(2^n) > S(2^{n+1}).$$