

Целочисленные оценки

14 января 2026 г.

Выгадывание единицы. Ключевая идея целочисленных неравенств: если $a > b$, то $a \geq b + 1$ при целых a и b .

Оценка частного. Делимость позволяет написать следующие оценки:

- если $a : b$, то или $a = 0$, или $|a| \geq |b|$;
- если $a : b$, то $a = 0$, $|a| = |b|$, или $|a| \geq 2|b|$;
- если $a : b$ и $|b| < \frac{|a|}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $|b| \leq \frac{|a|}{n+1}$.

Зажим между. Если f — монотонно возрастающая неограниченная(!) функция, то любое число $x \in \mathbb{R}$ «зажимается» между двумя значениями f в целых точках, т.е. есть единственное целое k , что $f(k) \leq x < f(k+1)$.

Примеры использования:

- если $n < \left| \frac{a}{b} \right| < n+1$, где $n \in \mathbb{N}$, то $a \not\equiv b$;
- если $k^2 < x < (k+1)^2$, где $k \in \mathbb{N}$, то x не является точным квадратом;
- найдётся «большое» k , что $(k+1)^2 - k^2 > C$, где C — заданная константа;
- если $2^k < x < 2^{k+1}$, где $k \in \mathbb{N}$, то $\frac{y}{x} < 2$;
- если в натуральном числе x ровно k цифр, то $10^{k-1} \leq x < 10^k$.

Часто помогают следующие трюки:

- перейти от нестрогого неравенства к строгому и наоборот;
- сделать несколько оценок сверху (снизу) и выбрать минимум (максимум);
- использовать для оценок разности или частные;
- найти значение k , при котором $f(k)$ больше (меньше) заданной константы;
- вывернуть «зажим» с помощью обратной функции, при $f(k) \leq x < f(k+1)$ верно, что $k \leq f^{-1}(x) < k+1$, откуда $f^{-1}(x) - 1 < k \leq f^{-1}(x)$.

Задачи для разбора

1. Три натуральных числа a, b и c таковы, что сумма любых двух из них кратна третьему. Какие значения может принимать дробь $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$?
2. Докажите, что если $a > b$ и $a, b \in \mathbb{N}$, то $\text{НОД}(a, b) \leq \min\{b, a - b\}$.
3. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждом его ребре — наибольший общий делитель двух чисел, записанных на концах этого ребра. Могла ли сумма всех чисел, записанных в вершинах, оказаться равной сумме всех чисел, записанных на рёбрах?
4. Натуральные числа a, b, c, d, e, f таковы, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, при этом $be = af + 1$. Докажите, что $d \geq b + f$.
5. Докажите, что $\text{НОД}(ab + 1, bc + 1, ca + 1) \leq \frac{a+b+c}{3}$ для попарно различных $a, b, c \in \mathbb{N}$.
6. При каких натуральных n число $4n^2 + 9n + 1$ будет точным квадратом?
7. Можно ли отметить в ряду натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) было кубом натурального числа?
8. Натуральные числа a, b, c таковы, что все числа $a + b, b + c, c + a$ являются степенями двойки. Докажите, что какие-то два из чисел a, b, c равны.
9. Петя записал на доске 8 натуральных чисел. Известно, что для записи чисел на доске он использовал 19 цифр. Какое количество цифр может быть использовано для записи четвёртых степеней Петиних чисел?
10. Найдите все такие натуральные $n \geq 4$, что $n - 1$ делится на $[\sqrt{n}] + 1$, а $n + 1$ делится на $[\sqrt{n}] - 1$.