

# Игры и стратегии

10 декабря 2025 г.

**Определение. Стратегия** — это набор правил, по которым игрок должен делать свои ходы в зависимости от предыдущих ходов противника и текущей позиции. Для игрока, делающего первый ход, стратегия должна включать в себя и выбор первого хода.

**Идея. Игры-шутки:** исход игры не зависит от ходов противников.

1. В строчку выписано 100 единиц. Михаил и Егор по очереди ставят между какими-нибудь двумя соседними единицами знак плюс или минус. Когда между всеми соседними числами поставлены знаки, вычисляется результат. Если полученное число чётно, то выигрывает Михаил, в противном случае — Егор. Кто выигрывает, если начинает Михаил?

*Как изменится итоговый результат, если в одном месте поменять плюс на минус или наоборот? Что из этого следует?*

**Идея. Анализ позиций:** можно отметить какие позиции на «игровом поле» являются проигрышными (П-позиции), а какие — выигрышными (В-позиции). Позиция выигрышная, если из неё можно перейти хотя бы в одну проигрышную; позиция проигрышная, если из неё все переходы ведут в выигрышные.

2. Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 15 клеток. В крайней правой её клетке стоит шашка. Двое играющих по очереди передвигают её влево на 1, 3 или 4 клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

*Начните с позиции, которая точно является проигрышной, и обозначьте её П. Позиции, из которых можно прийти в П за один ход, будут являться выигрышными.*

**Идея. Заповедники:** идея в том, чтобы выделить область («заповедник»), в которой игрок может гарантированно сделать нужное количество ходов, независимо от действий противника в остальной части игрового поля.

3. Двое по очереди кладут обычные пяτάки (одинаковые круглые монеты) на большой круглый стол так, чтобы монеты не накладывались друг на друга и полностью лежали на столе. Проигрывает тот, кто не может поставить очередной пятак. Кто выигрывает при правильной игре?

*Подсказка: центр стола — это и есть заповедник.*

**Идея. Один важный ход:** иногда существует один конкретный ход (обычно первый), который радикально меняет структуру игры и гарантирует победу независимо от дальнейших действий соперника.

4. На столе лежат две кучки камней: 15 и 20. За ход можно взять любое натуральное количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто победит?

*Важный ход — первый*

**Идея. Жадная стратегия:** иногда оптимальная стратегия — всегда делать максимально возможный (или минимально возможный) ход, не заботясь о последствиях.

5. На доске расставлены числа 1, 2, 3, ..., 10. Двое по очереди вычёркивают по одному числу. Когда останутся два числа, выигрывает тот, чьим последним вычёркнутым числом было большее. Кто побеждает при правильной игре?

*Какое число надо вычёркивать, чтобы гарантировать себе хороший результат?*

**Идея. Передача хода:** суть заключается в том, чтобы предположить, что у соперника есть выигрышная стратегия, а затем сделать «бесполезный» ход, после которого позиция остаётся по сути прежней, и далее использовать предполагаемую стратегию соперника против него самого.

6. В Марсельских шахматах каждый игрок перемещает фигуры 2 раза подряд, остальные правила идентичны обыкновенным шахматам. Докажите, что второй игрок не может иметь выигрышную стратегию.

*Первым ходом сделайте такой ход, что второй игрок теперь как-будто ходит первым.*

7. Двое играют в крестики-нолики на доске  $n \times n$ , причём для выигрыша нужно расположить в ряд (вертикальный, горизонтальный или диагональный) не менее подряд идущих знаков (крестиков или ноликов). Докажите, что у первого есть стратегия, гарантирующая ему выигрыш или по крайней мере ничью.

*Не обращайте внимания на первый ход за крестиков.*

**Идея. Цена игры:** в играх с числовым результатом нужно найти оптимальное значение, которого может гарантированно добиться каждый игрок при идеальной игре обеих сторон.

8. Макс и Мин красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок (любую по своему выбору) в синий или зелёный цвет (по своему выбору). Начинает Макс. Когда весь забор покрашен (каждый игрок покрасил 10

досок), подсчитывают число изменений цвета — границ, где синий цвет сменяется зелёным или наоборот. Это число считается результатом игры. Таким образом, идеал Макса — забор, где цвета чередуются (19 линий смены цветов), а идеал Мина — забор, выкрашенный целиком в один и тот же цвет (0 линий). Конечно, ни тот, ни другой не могут достигнуть своего идеала. А чего они таки могут достигнуть?

*Чего может добиться каждый из них одним своим ходом?*