

Неравенство Коши

1. Докажите неравенство для положительных $x_1, \dots, x_n$:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

2. Докажите неравенство $x + y + z \leq \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ для положительных x, y, z .

3. (а) Для $x > 0$ найдите минимальное значение функции

$$f(x) = x^{40} + \frac{1}{x^{16}} + \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x}.$$

(б) Положительные числа x, y, z таковы, что $xy^2z^3 = 108$. Какое минимальное значение может принимать $x + y + z$?

4. Докажите неравенство для любых положительных чисел x и y :

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}.$$

5. Сумма положительных чисел x, y, z равна 1. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$.

6. Решите систему при положительных значениях переменных:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4 \\ \dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

7. Докажите неравенство для любых натуральных m, n и положительных $x_1, \dots, x_n$ таких, что $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$:

$$(x_1 + m)(x_2 + m) \cdot \dots \cdot (x_n + m) \geq (m + 1)^n.$$

8. Найдите ошибки в решении и приведите правильное.

Условие. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x + y \leq 1$. Докажите, что $25xy \leq 4x + 9y$.

Решение. Заметим, что после умножения обеих частей на 25, переноса обоих слагаемых в левую часть и добавления к обеим частям 36 доказываемое неравенство равносильно $(25x - 9)(25y - 4) \leq 36$, которое следует из неравенства

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \text{ для } a = 25x - 9 \text{ и } b = 25y - 4:$$

$$(25x - 9)(25y - 4) \leq \left(\frac{25(x+y) - 9 - 4}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{25 - 13}{2} \right)^2 = 36.$$

9. $a + b + c = 1$ и $a, b, c > 0$. Докажите, что $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$.
10. Докажите неравенство для положительных чисел:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + d^2} + \frac{d^3}{d^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c + d}{2}.$$