

Движения. Лекция.

Определение. *Преобразованием плоскости* называется взаимнооднозначное отображение плоскости в себя.

Определение. *Движением* называется преобразование, сохраняющее расстояние между точками.

1. **Теорема.** Движение задается образами трех неколлинеарных точек.

Элементарные движения. Тожественное преобразование, параллельный перенос, осевая симметрия, поворот (центральная симметрия - частный случай поворота). Если что-то из этого списка забыли, то спросите кого-то - это несложно.

Определение. *Композицией движений* F и G называется отображение $G \circ F$, т.е. результат последовательного применения движений F и G .

2. Покажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции не более, чем трех осевых симметрий.

Определение. *Движением первого рода* называется движение, которое не меняет ориентацию. *Движением второго рода* называется движение, которое меняет ориентацию.

Определение. *Скольльзящей симметрией* называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

3. **Теорема Шаля.** Любое движение плоскости первого рода является параллельным переносом или поворотом, а второго рода - скольльзящей симметрией.
4. Классифицируйте движения с точки зрения множества неподвижных точек.
5. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360° , является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? Исследуйте также случай, когда сумма углов поворотов кратна 360° .
6. С помощью циркуля и линейки постройте многоугольник с нечётным числом сторон, зная середины его сторон.
7. Постройте ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала бы на данной прямой a , а две другие вершины лежали на данных прямых b и c .

Движения. Семинар.

1. Дан угол и точка A внутри него. Постройте точки B и C на сторонах угла так, чтобы A оказалась серединой BC .
2. С помощью циркуля и линейки постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых.
3. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P . Через вершины A, B, C и D проведены перпендикулярны к PB, PC, PD и PA соответственно. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.
4. Внутри правильного треугольника ABC выбрана точка M так, что квадрат расстояния до точки A равен сумме квадратов расстояний до точек B и C . Найдите угол BMC .
5. Докажите, что центры правильных треугольников, построенных внутренним (внешним) образом на сторонах треугольника ABC , образуют правильный треугольник.
6. Через данную точку A провести прямую, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.
7. На прямоугольном бильярдном столе лежит шар. Постройте траекторию, при движении по которой шар, отразившись от каждой стенки по одному разу, вернётся на исходное место.