

Процессы. Лекция.

Ключевые идеи, которые помогают в решении задач на процессы:

- Инвариант
 - Полуинвариант
 - Исследование 1 шага процесса
 - Непрерывность
1. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 20$. За ход разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них число ab . Какое число окажется на доске после 19 операций?
 2. На доске написали число 1. После этого к записанному числу каждую минуту прибавляют его сумму цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456789?
 3. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удалённый от него город B , оттуда — в самый удалённый от него город C , и так далее. Докажите, что если A не совпадает с C , то путешественник никогда не вернется в город A .
 4. На доске написано много натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух **меньших различных** натуральных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.
 5. Дана полоска 1×20 , в которой каждая клетка либо белая, либо черная. За одну операцию можно перекрасить клетки в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число операций можно наверняка сделать всю полоску белой?
 6. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

Процессы. Семинар.

1. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 20$. За ход разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них число $a + b - 1$. Какое число окажется на доске после 19 операций?
2. В вершинах куба написаны числа: семь нулей и одна единица. За ход можно прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными?
3. (**ПИСЬМЕННО**) На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.
4. В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать произвольное целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a , а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a . Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?
5. Десять карточек с числами от 1 до 10 положили в ряд в некотором порядке. За один ход можно поменять местами две соседние карточки. За какое наименьшее число ходов можно всегда получить ряд из карточек, идущих слева направо в порядке возрастания?
6. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается менять знак в любых трёх подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину?
7. В парламенте у каждого его члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.
8. Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2 . Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.