

Принцип крайнего, упорядочивание. Лекция

Задачи для разбора

Идея. Рассуждения от крайнего элемента могут помочь восстановить конструкцию.

1. Коля загадал 4 неотрицательных целых числа и посчитал их всевозможные попарные суммы. Всего 6 штук. Какие он задумал числа, если эти суммы: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Идея В некоторых задачах просят указать элемент с определённым свойством. Часто им может выступать «*крайний*» по какому-то параметру элемент.

2. На доске написано несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух чисел найдётся число кратное им обоим. Докажите, что на доске есть число кратное всем.

3. В пустыне расположено 2025 наблюдательных пунктов. Каждый следит за ближайшим к нему (среди расстояний между пунктами нет одинаковых).

а) Докажите, что есть два наблюдательных пункта, следящих друг за другом.

б) Докажите, что есть наблюдательный пункт, за которым никто не наблюдает.

Идея Полезно нарушить симметрию, начав рассуждения от «крайнего» элемента.

4. На шахматной доске расставлены ладьи. Докажите, что найдётся ладья, бьющая не более 2 других ладей.

5. а) По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны.

б) В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число. При этом оказалось, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Верно ли что все числа равны между собой?

в) В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано целое число. При этом оказалось, что каждое число равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Верно ли что все числа равны между собой?

Принцип крайнего, упорядочивание. Семинар

Задачи для самостоятельного решения

1. Петя расставил в вершинах куба все натуральные числа от 1 до 8 по одному разу, а Вася затем записал на каждом ребре модуль разности чисел в его концах. Мог ли Петя выбрать такую расстановку чисел в вершинах, чтобы

- а) среди чисел на рёбрах было не более 2 разных значений?
- б) среди чисел на рёбрах было ровно 3 разных значения?

2. Можно ли числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 100 записать

- а) по кругу;
- б) в ряд

так, чтобы, чтобы в каждой паре соседних одно из чисел делилось на другое?

3. Железный Дровосек рубит топором кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ на единичные кубики. После очередного удара части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было рубить несколько частей одновременно. Докажите, что понадобится не менее 6 ударов.

4. 8 команд провели однокруговой турнир по волейболу (в волейболе не бывает ничьих). Докажите, что найдутся 4 команды A, B, C, D такие, что A обыграла B, C, D ; B обыграла C и D , а C выиграла у D .

5. В лесу в шеренгу выстроились лисы и волки. Любой зверь, стоящий между двумя лисами, дружит хотя бы с одной из них. Докажите, что точно есть два зверя, стоящие рядом, которые в совокупности дружат со всеми лисами. (Считается, что зверь дружит сам с собой.)

6. На плоскости расположено бесконечно много прямоугольников с четвёрками вершин вида $((0; 0), (t; 0), (t; n), (0; n))$ (t, n — натуральные числа, все вершины прямоугольников различны, кроме $(0; 0)$). Докажите, что найдутся два прямоугольника, которые находятся друг внутри друга.