

Теоремы Чевы и Менелая. Лекция.

1. На прямой AB отмечены точки X и Y , отличные от A и B . Докажите, что

$$X = Y \iff \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AY}}{\overline{YB}}.$$

2. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно. Тогда точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, если и только если выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

- (а) Докажите, что если точки лежат на одной прямой, то соотношение выполнено.
(б) Докажите, что если соотношение выполнено, то точки лежат на одной прямой.

3. **Теорема Чевы.** Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на прямых BC, CA и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

4. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) окружность касается его сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 . Внеписанная окружность касается продолжения сторону BC за точку C в точке A_1 . Докажите, что B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой.
5. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$), а CL — биссектриса треугольника ACH . На прямой CH отмечена такая точка K , что $KB \parallel CL$. Докажите, что прямая KL делит отрезок AC пополам.

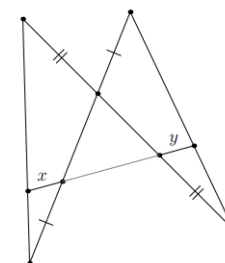
Теоремы Чевы и Менелая. Семинар.

Дедлайн сдачи и разбор задач — 6 апреля

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень.

- Докажите, что основания внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.
- Дан треугольник ABC . Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, если точки A_1, B_1, C_1 определены как
 - точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно (точка Жергонна);
 - точки касания внеписанных окружностей с отрезками BC, CA, AB соответственно (точка Нагеля).
- На картинке ниже докажите, что $x = y$.



Продвинутый уровень.

- Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами высот, проведённых к этим сторонам, пересекаются в одной точке.
- (Теорема о трёх параллелограммах.) На плоскости даны две тройки параллельных прямых: $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3$ и $b_1 \parallel b_2 \parallel b_3$. Обозначим точку пересечения прямых a_i и b_j за X_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Докажите, что прямые $X_{11}X_{22}, X_{13}X_{32}, X_{31}X_{23}$ пересекаются в одной точке или параллельны.
- Теорема Дезарга.** Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой.