

Процессы. Лекция.

Ключевые идеи, которые помогают в решении задач на процессы:

- Инвариант
 - Полуинвариант
 - Исследование 1 шага процесса
 - Непрерывность
1. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 20$. За ход разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них число ab . Какое число окажется на доске после 19 операций?
 2. На доске написали число 1. После этого к записанному числу каждую минуту прибавляют его сумму цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456789?
 3. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удалённый от него город B , оттуда — в самый удалённый от него город C , и так далее. Докажите, что если A не совпадает с C , то путешественник никогда не вернется в город A .
 4. На доске написано много натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух **меньших различных** натуральных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.
 5. Дана полоска 1×20 , в которой каждая клетка либо белая, либо черная. За одну операцию можно перекрасить клетки в любом прямоугольнике. За какое наименьшее число операций можно наверняка сделать всю полоску белой?
 6. Полоска из 101 клетки заполнена фишками. Мудрец и хитрец играют в следующую игру. Мудрец указывает хитрецу на фишки в некотором порядке, на каждую по разу, а хитрец либо снимает указанную фишку, либо сдвигает её в соседнюю свободную клетку (если такая есть). Сдвигать можно только дважды за игру. Может ли хитрец добиться того, чтобы в конце игры оставшиеся две фишки стояли рядом?

Процессы. Семинар.

1. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 20$. За ход разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них число $a + b - 1$. Какое число окажется на доске после 19 операций?
2. В вершинах куба написаны числа: семь нулей и одна единица. За ход можно прибавить по единице к числам в концах любого ребра куба. Можно ли добиться того, чтобы все числа стали равными?
3. (**ПИСЬМЕННО**) На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Доказать, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.
4. В одной из угловых клеток квадратной таблицы 3×3 стоит число 2, а в остальных восьми клетках — нули. За одну операцию Вася может выбрать произвольное целое число a и к двум рядом стоящим числам любой строки или столбца прибавить a , а из третьего числа этой строки (столбца) вычесть a . Сможет ли Вася такими операциями сделать все числа равными?
5. Десять карточек с числами от 1 до 10 положили в ряд в некотором порядке. За один ход можно поменять местами две соседние карточки. За какое наименьшее число ходов можно всегда получить ряд из карточек, идущих слева направо в порядке возрастания?
6. В вершинах правильного 12-угольника расставлены числа $+1$ и -1 так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается менять знак в любых трёх подряд идущих вершинах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину?
7. Квадрат 8×8 покрашен в 2 цвета в шахматном порядке. Разрешается перекрашивать все клетки прямоугольника 2×3 или 3×2 . Докажите, что такими операциями нельзя всю доску сделать одноцветной.