Квадратный трёхчлен

$P(x) = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c}$, где $a \neq 0$

коэффициенты

Пример: $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$

$P(2) = 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 3 = -3$

А когда $P(x)$ равен какому-то числу?

Как решить ур-ие $P(x) = 0$?

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Big| : a$$

$$\underline{x^2} + \underline{\frac{b}{a}x} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\underline{M(x) = x^2 + px + q}$$

приведённый (унитарный) трёхчлен

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geqslant 0} = \frac{b^2 - 4ac}{\underbrace{\boxed{4a^2}}_{\geqslant 0} > 0}$$

$$\underline{D = b^2 - 4ac}$$

дискриминант

- Если $D < 0$, то корней нет.

- Если $D \geq 0$, то

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Если $D=0$, то $x_1=x_2$.

1. Разность кубов корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равна 2025. Сколько корней имеет уравнение $ax^2+2bx+4c=0$?

лишняя информация

У $ax^2+bx+c=0$ два корня, т.е.

$D>0$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\cdot\left((x_1+x_2)^2-x_1x_2\right)=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\cdot\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\cdot\frac{b^2-ac}{a^2}=2025$$

$$ax^2+2bx+4c=0$$

$$4b^2-4\cdot a\cdot 4c=4\cdot(b^2-4ac)>0$$

Ответ: 2 корня

2. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два корня. Верно ли, что уравнение:

(а) $a^{2025}x^2+b^{2025}x+c^{2025}=0$

(б) $a^{2026}x^2+b^{2026}x+c^{2026}=0$ также имеет два корня?

$ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$

$D=b^2-4ac>0$

а) $b^{4050}-4a^{2025}c^{2025}$

$ac\geq 0$

$b^2>4ac \quad |^{2025}$

$b^{4050}>4^{2025}(ac)^{2025}\boxed{\geq}4(ac)^{2025}$

$(ac)^{2025}\geq 0$

$ac<0$

$b^2\geq 0>4ac$

$b^{4050}\geq 0>4a^{2025}c^{2025}$

Тогда $b^{4050}>4a^{2025}c^{2025}$.

Ответ: а) Верно, то же два корня.

б) $a^{2026}x^2+b^{2026}x+c^{2026}=0$

$D=b^{4052}-4a^{2026}c^{2026}$

Новый дискриминант не всегда положителен.

$x^2+x-1=0 \qquad D=1+4\cdot1\cdot1>0$

$x^2+x+1=0 \qquad D=1-4\cdot1\cdot1<0$

Ответ: б) не всегда).

3. Найдите все такие q, что при любом p уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня.

$p^2-4q>0$ при любом p.

Если $p=0$, то $0^2-4q>0 \Rightarrow q<0$.

Если $q<0$, то $\underbrace{p^2}_{\geq 0}\underbrace{-4q}_{>0}>0$

Ответ: при $q<0$.

$$\left(x+\underbrace{\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}}_{-x_1}\right)\left(x+\underbrace{\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}}_{-x_2}\right)=0.$$

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Если $D<0$, то разложения на множители нет.

Если $D=0$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

4. Корни квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + px + q$ равны a_1 и a_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x) = x^2 + rx + s$ равны b_1 и b_2. Докажите, что

$$f(b_1) + f(b_2) + g(a_1) + g(a_2) \geqslant 0.$$

$$f(x)=x^2+px+q=(x-a_1)(x-a_2)$$

$$g(x)=x^2+rx+s=(x-b_1)(x-b_2)$$

$$f(b_1)+f(b_2)+g(a_1)+g(a_2)=$$
$$=(b_1-a_1)(b_1-a_2)+(b_2-a_1)(b_2-a_2)+(a_1-b_1)(a_1-b_2)+(a_2-b_1)(a_2-b_2)=$$
$$=(a_1-b_1)((a_1-b_2)+(a_2-b_1))+(a_2-b_2)((a_1-b_2)+(a_2-b_1))=$$
$$=((a_1-b_1)+(a_2-b_2))((a_1-b_2)+(a_2-b_1))=(a_1+a_2-b_1-b_2)^2\geq 0$$

5. Петя придумал 1013 приведённых квадратных трёхчленов $f_1, \ldots, f_{1013}$, среди корней которых встречаются все целые числа от 0 до 2025. Вася рассматривает всевозможные уравнения $f_i = f_j$ $(i \neq j)$, и за каждый найденный у них корень Петя платит Васе по рублю. Каков наименьший возможный доход Васи?

Петя минимизирует доход Васи

$f_i=x^2+a_ix+b_i$; $f_j=x^2+a_jx+b_j$

$$0=f_i-f_j=(x^2+a_ix+b_i)-(x^2+a_jx+b_j)=(a_i-a_j)x+(b_i-b_j)$$

$$x=-\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}$$

Если $a_i+b_i=a_j+b_j$, то $-\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}=1$

$b_i-b_j=a_j-a_i$

Пусть $f_1=x^2+2025$; $f_2=x^2+x+2024$; $f_3=x^2+2x+2023\ldots$

$f_i(1)=f_j(1)=2026.$

Значения $P(x) = ax^2 + bx + c$ в ключевых точках:

- $P(0) = c$ (свободный член)
- $P(1) = a + b + c$ (сумма коэффициентов)
- $P(-1) = a - b + c$ (знакопеременная сумма коэффициентов)

6. Приведённый квадратный трёхчлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0)P(1) = 0$.

$P(x)=x^2+px+q$

Пусть t - общий корень.

Тогда $\begin{cases} \boxed{P(t)=0} \\ P(P(P(t)))=0 = P(P(0)) = P(q) \end{cases}$

$$0=P(q)=q^2+pq+q=q\cdot(q+p+1)=P(0)\cdot P(1)$$

равенство при все x X

$$P(x)=ax^2+\underset{\sim}{b}x+\underset{\sim}{c}=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+\underset{\sim}{a(-x_1-x_2)}x+\underset{\sim}{ax_1x_2}$$

$$\begin{cases} b=a(-x_1-x_2) \\ c=ax_1x_2 \end{cases}$$

Теорема Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

7. Существуют ли такие три числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом — два отрицательных?

ax^2+bx+c

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}>0 \end{cases}$$

$x_1,x_2>0 \Rightarrow b$ и a разных знаков

$x_1,x_2>0 \Rightarrow c$ и a одного знака

Два коэфф. одного знака, один другого.

px^2+qx+r

$$\begin{cases} x_3+x_4=-\dfrac{q}{p}<0 \\ x_3\cdot x_4=\dfrac{r}{p}>0 \end{cases}$$

$x_3,x_4<0 \Rightarrow q$ и p одного знака

$x_3,x_4<0 \Rightarrow r$ и p одного знака

Все коэффициенты отрицательны.

Противоречие, условие слева и справа не могут быть одновременно.

8. Квадратное уравнение $x^2+ax+1=b$ имеет два целых ненулевых корня. Докажите, что число a^2+b^2 является составным.

намёк на Виета

Пусть x_1,x_2 - корни $x^2+ax+1=b$.

$x^2+ax+(1-b)=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-a}{1} \\ x_1x_2=\dfrac{1-b}{1} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-x_1-x_2 \\ b=1-x_1x_2 \end{cases}$$

$$a^2+b^2=(-x_1-x_2)^2+(1-x_1x_2)^2=x_1^2+\cancel{2x_1x_2}+x_2^2+1-\cancel{2x_1x_2}+(x_1x_2)^2=$$

$$=\underbrace{\underbrace{(x_1^2+1)}_{>1}\underbrace{(x_2^2+1)}_{>1}}_{\text{составное число}}$$

4. Корни квадратного трёхчлена $f(x)=x^2+px+q$ равны a_1 и a_2, а корни квадратного трёхчлена $g(x)=x^2+rx+s$ равны b_1 и b_2. Докажите, что

$$f(b_1)+f(b_2)+g(a_1)+g(a_2)\geqslant 0.$$

$\begin{cases} b_1+b_2=-r \\ b_1b_2=s \end{cases}$ $\qquad b_1^2+b_2^2=(b_1+b_2)^2-2b_1b_2=r^2-2s$

$\begin{cases} a_1+a_2=-p \\ a_1a_2=q \end{cases}$ $\qquad a_1^2+a_2^2=(a_1+a_2)^2-2a_1a_2=p^2-2q$

$$f(b_1)+f(b_2)+g(a_1)+g(a_2)=b_1^2+pb_1+q+b_2^2+pb_2+q+$$
$$+a_1^2+ra_1+S+a_2^2+ra_2+S=(b_1^2+b_2^2)+p(b_1+b_2)+2q+$$
$$+(a_1^2+a_2^2)+r(a_1+a_2)+2S=(r^2-2S)+p\cdot(-r)+2q+$$
$$+p^2-2q+r\cdot(-p)+2S=r^2-2pr+p^2=(r-p)^2\geq 0$$

Обратная теорема Виета. Если числа p и q таковы, что:

$$x_1 + x_2 = p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - px + q = 0$,
а также всех уравнений вида $ax^2 - apx + aq = 0$ при $a \neq 0$.

других корней, кроме x_1 и x_2 нет

„Скрытый трехчлен"

9. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

$$a+b^2+c^2=a^2+b+c^2=a^2+b^2+c=S$$

$$a+\underbrace{b^2+c^2+a^2}_{k}=S+a^2 \qquad \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{k}+b=S+b^2 \qquad \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{k}+c=S+c^2$$

$$a+k=S+a^2 \qquad b+k=S+b^2 \qquad c+k=S+c^2$$

Пусть $P(x)=x^2-x+S-k.$

a, b, c корни $P(x)$

$P(a)=0$; $P(b)=0$; $P(c)=0$

Но корни $P(x)$ принимают не более 2 значений.

По п. Дирихле среди a, b, c есть равные.

10. Существуют ли три различных действительных числа, каждое из которых в сумме с произведением двух оставшихся дает одно и то же число?

$$a+bc=b+ca=c+ab=S$$

$$\begin{cases} a^2+\underbrace{abc}_{k}=aS \\ b^2+\underbrace{abc}_{k}=bS \\ c^2+\underbrace{abc}_{k}=cS \end{cases} \qquad P(x)=x^2-Sx+k$$

a, b, c – корни

У $P(x)$ не более 2 корней.

По принципу Дирихле среди a, b, c есть равные.

Пример. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то

- $-x_1$ и $-x_2$ — корни трёхчлена $ax^2 - bx + c$
- $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ — корни трёхчлена $cx^2 + bx + a$ при $c \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c} \\ \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{a}{c} \end{cases}$$

11. Пусть a, b, c — попарно различные числа. Докажите, что выражение

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)$$

не равно нулю.

Пусть $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=0$

Пусть это трёхчлен относительно (т.е. все параметры, они fix)

$$P(x)=x^2\underbrace{(c-b)}_{\neq 0}+x(b^2-c^2)+bc(c-b)$$

$$P(a)=a^2\underbrace{(c-b)}_{\neq 0}+a(b^2-c^2)+bc(c-b)=0$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b^2-c^2}{c-b}=b+c \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{bc(b-c)}{c-b}=bc \end{cases}$$

Тогда $\{x_1,x_2\}=\{b,c\}$

равны как множества

а один из корней x_1, x_2, т.е.

а одно из чисел b, c

Если увидеть разложение сразу:

$$(c-b)(a-c)(a-b)=0$$

$$(b-c)(c-a)(a-b)=0$$

12. Квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ принимает в точках $\frac{1}{a}$ и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена $f(x)$ имеют разные знаки.

намёк на Виета

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2+b\cdot\frac{1}{a}+c$$

$$f(c)=a\cdot c^2+b\cdot c+c$$

$$0>f\left(\frac{1}{a}\right)\cdot f(c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}+c\right)(ac^2+bc+c)=\underbrace{\left(\frac{1}{a}+\frac{b}{a}+c\right)^2}_{>0}\cdot ac$$

Тогда $ac<0$.

Корни имеют разные знаки $\Leftrightarrow$ a и c разных знаков.

ч.т.д.