

Неравенство Коши

1. Докажите неравенство для положительных a, b, c, d :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4.$$

2. Для положительных a и b докажите неравенство $(a^3 + b)(a + b^3) \geq 4a^2b^2$.
3. Докажите неравенство $x + y + z \leq \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ для положительных x, y, z .
4. Для любых x и y докажите неравенство $2x^2 + y^2 + 25 \geq 2xy + 10x$.
5. (а) Для $x > 0$ найдите минимальное значение функции

$$f(x) = x^{40} + \frac{1}{x^{16}} + \frac{2}{x^4} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x}.$$

- (б) Положительные числа x, y, z таковы, что $xy^2z^3 = 108$. Какое минимальное значение может принимать $x + y + z$?
6. Решите систему при положительных значениях переменных:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 4 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1 \\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4 \\ \dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4 \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1 \end{cases}$$

7. Докажите неравенство для любых натуральных m, n и положительных $x_1, \dots, x_n$ таких, что $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$:

$$(x_1 + m)(x_2 + m) \cdot \dots \cdot (x_n + m) \geq (m + 1)^n.$$

8. Найдите ошибки в решении и приведите правильное.

Условие. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x + y \leq 1$. Докажите, что $25xy \leq 4x + 9y$.

Решение. Заметим, что после умножения обеих частей на 25, переноса обоих слагаемых в левую часть и добавления к обеим частям 36 доказываемое неравенство равносильно $(25x - 9)(25y - 4) \leq 36$, которое следует из неравенства

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \text{ для } a = 25x - 9 \text{ и } b = 25y - 4:$$

$$(25x - 9)(25y - 4) \leq \left(\frac{25(x+y) - 9 - 4}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{25 - 13}{2} \right)^2 = 36.$$