

Неравенство Коши

17 декабря 2025 г.

Элементарные идеи в неравенствах.

1. Сложение неравенств и доминирование.
2. Перемножение неравенств с учётом знаков.
3. Разложение на множители.
4. Упорядочивание или рассмотрение наибольшего/наименьшего.
5. Однородность, степенное выравнивание.
6. Чем число $0 < a < 1$ отличается от $a > 1$?
7. Когда в неравенстве равенство?
8. Замены переменных в неравенствах.
9. Огрубление.
10. Рассуждение от противного.
11. Рассмотрение случаев.
12. Индукция.

Среднее степени d . Для положительных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и действительного $d \neq 0$ среднее степени d есть $A_d(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^d + \dots + x_n^d}{n} \right)^{1/d}$.

Среднее геометрическое ($d = 0$). Для неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$ среднее геометрическое есть $A_0(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$.

Неравенство о средних. Для любых $d_1 > d_2$ и положительных $x_1, x_2, \dots, x_n$ верно неравенство: $A_{d_1}(x_1, \dots, x_n) \geq A_{d_2}(x_1, \dots, x_n)$.

Обычно используют $A_2 \geq A_1 \geq A_0 \geq A_{-1}$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Неравенство о средних для двух чисел. Для положительных a и b :

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a + b}.$$

Неравенство Коши. Для любых неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Полезные формулировки. $x + \frac{1}{x} \geq 2, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, (x+y)^2 \geq 4xy.$

Оценки сумм и произведений. Пусть сумма n неотрицательных чисел равна S , а их произведение — это P . По неравенству Коши: $\frac{S}{n} \geq \sqrt[n]{P}$. Тогда получаются оценки суммы снизу через произведение и произведения сверху через сумму: $S \geq n \cdot \sqrt[n]{P}$ и $P \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n$.

Полезные техники. При применении неравенства Коши часто возникают:

- Сумма произведений.
- Произведение сумм.
- Когда в неравенстве равенство?
- Весовое неравенство — разбиение слагаемых.
- Повышение степени домножением.

Когда в неравенстве равенство? При доказательстве неравенств полезно проверять, достигается ли равенство. Равенство в неравенстве Коши достигается при $x_1 = \dots = x_n$.

Весовое неравенство 1. Для $x_1, \dots, x_n \geq 0$ и $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$:

$$\frac{x_1\mu_1 + \dots + x_n\mu_n}{\mu_1 + \dots + \mu_n} \geq (x_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\mu_n})^{\frac{1}{\mu_1 + \dots + \mu_n}},$$
 (удобно при $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$).

Весовое неравенство 2. Для $x_1, \dots, x_n \geq 0$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n) \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n},$$
 (удобно при $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n = 1$).

Задачи для разбора

1. Как разбить число 2025 на два слагаемых с наибольшим произведением?
2. Для натурального $n \geq 2$ докажите, что $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n^n}{n+1}$.
3. Решите уравнение $\frac{25}{\sqrt{x-1}} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} = 14 - \sqrt{x-1} - \sqrt{y-2}$.
4. (а) Для любых x, y, z докажите $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.
(б) Для любых a, b, c, d, e докажите $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.
5. Докажите, что для длин a, b, c сторон треугольника ABC верно неравенство:

$$abc \geq (a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

6. Докажите, что для $a, b, c \geq 0$ верно $\frac{a^6}{6} + \frac{b^3}{3} + \frac{c^2}{2} \geq abc$.
7. Докажите, что если $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ca > a + b + c$, то $a + b + c > 3$.
8. Числа x, y, z таковы, что $x > y^2 + z^2, y > z^2 + x^2, z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше $\frac{1}{2}$.