

Теория чисел 2

29 октября 2025 г.

Определение 1. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по натуральному модулю n* , если у них одинаковые остатки при делении на n .

Определение 2. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по натуральному модулю n* , если их разность делится на n .

Обозначение сравнимости a и b по модулю n . $a \equiv b \pmod{n}$ или $a \equiv_n b$.

Ключевая идея. $a \equiv b \pmod{a-b}$ и $a \equiv -b \pmod{a+b}$.

Свойства сравнимости. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$, то:

- $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- $a - c \equiv b - d \pmod{n}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$
- $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ для любого натурального m
- $a \equiv b \pmod{\frac{n}{k}}$, если n делится на k
- $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{n}{k}}$, если a, b, n делятся на k
- $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{n}$, если a и b делятся на взаимно простое с n число k

Защипливание степеней. Чтобы найти остаток от деления a^m на n , нужно возводить остаток r от деления a на n в разные степени. С некоторого момента остатки степеней начнут зашипливаться.

Задачи для разбора на лекции

1. $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на n . Докажите, что $ab - 6cd$ делится на n .
2. При каких целых m число $2m^2 - 3m + 1$ делится на $3m - 2$?
3. $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$. Докажите, что $m^3 + 1$ — тоже.
4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $s = a + b + c + d$ — составное.

Сравнимость по модулям 3 и 9. $S(n) \equiv n \pmod{3}$ и $S(n) \equiv n \pmod{9}$, где $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n .

Сравнимость по модулям 2^k и 5^k . Натуральное число сравнимо с числом из своих последних k цифр по модулям 2^k и 5^k .

Сравнимость по модулю 11. $S_{\pm}(n) \equiv n \pmod{11}$, где $S_{\pm}(n)$ — знакопеременная сумма цифр натурального n (самая правая цифра с +).

Полезные остатки квадратов. Для любого натурального n выполнено:

- $n^2 \equiv 0 \pmod{3}$ или $n^2 \equiv 1 \pmod{3}$
- $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$ или $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$
- $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$, $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ или $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$

Полезные остатки кубов. Для любого натурального n выполнено:

- $n^3 \equiv 0 \pmod{7}$, $n^3 \equiv 1 \pmod{7}$ или $n^3 \equiv 6 \equiv -1 \pmod{7}$
- $n^3 \equiv 0 \pmod{9}$, $n^3 \equiv 1 \pmod{9}$ или $n^3 \equiv 8 \equiv -1 \pmod{9}$

5. Может ли сумма двух точных квадратов заканчиваться на 2023?
6. Можно ли число 1986 представить в виде суммы 6 квадратов нечётных чисел?
7. Решите уравнение $20a^3 - 28b^2 = 2028$, где a, b — натуральные числа.
8. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки? (Цифру 0 ставить на первое место нельзя.)