

Оценка + пример на клетках. Лекция.

Ключевые методы, которые помогают в решении клетчатой комбы:

- Раскраска, разбиение
- Подсчет 2 способами
- Переход к графу строк и столбцов

1. Дана клетчатая доска 10×20 . Ее клетки раскрашены в белый и черный цвета так, что клеток каждого цвета ровно по 100 штук. Какое наибольшее количество разноцветных доминошек из нее можно заведомо вырезать?
2. Клетки доски $3k \times 3k$ покрашены диагональной раскраской в три цвета. За один ход разрешается выбрать две соседние по стороне клетки и перекрасить их по правилу: клетку 1 цвета в цвет 2, клетку цвета 2 — в цвет 3, клетку цвета 3 — в цвет 1. Какое наименьшее количество клеток необходимо перекрасить, чтобы сделать доску одноцветной?
3. В каждой клетке таблицы 10×10 стоит целое число. При каком наибольшем натуральном k можно гарантированно утверждать, что из этой таблицы можно по линиям сетки вырезать связную фигуру (возможно, даже всю таблицу), сумма чисел внутри которой делится на k ? Связной фигурой будем называть такое множество клеток, что от каждой из них можно добраться до любой другой клетки этого множества, перемещаясь каждый раз только в соседнюю по стороне клетку этого множества.
4. Назовём расстоянием между двумя клетками клетчатой доски наименьшее количество ходов, за которое шахматный король может добраться от одной из них до другой. Найдите наибольшее количество клеток, которое можно отметить на доске 100×100 так, чтобы среди них не нашлось двух клеток, расстояние между которыми равно 15.
5. Дано натуральное число $n \geq 2$. Рассмотрим все такие покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

Оценка + пример на клетках. Семинар.

1. Какое наименьшее число клеток доски 8×8 нужно покрасить в чёрный цвет, чтобы в любом уголке из трёх клеток была хотя бы одна закрашенная клетка?
2. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 8×8 так, чтобы среди любых двух соседних клеток хотя бы одна из них была отмечена, а также в любой строке и любом столбце были отмечены как минимум две соседние клетки?
3. Какое наименьшее количество уголков можно разместить в квадрате 8×8 так, чтобы в этот квадрат больше нельзя было поместить ни одного такого уголка?
4. На клетчатую доску 11×11 положили несколько квадратов 2×2 так, что каждый квадрат закрывает четыре клетки и каждые два квадрата пересекаются не более чем по одной клетке. Какое наибольшее число квадратов могли положить?
5. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 клетки нужно закрасить на доске 8×8 клеток, чтобы любой квадрат 2×2 клетки содержал по крайней мере одну закрашенную клетку?
6. Имеется один черный ферзь и n белых. При каком наибольшем n эти фигуры можно расставить на шахматной доске так, чтобы белые ферзи не били друг друга? Ферзь не бьет насквозь через другую фигуру.
7. Дана клетчатая доска 1000×1000 . Фигура гепард из произвольной клетки x бьет все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x , за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?