

1. Про два действительных числа известно, что их сумма на 1 больше, чем их произведение. Какими могут быть эти числа?

BTW: Можете погуглить Simons favourite factoring trick


$$x + y = xy + 1$$

$$xy - x - y + 1 = 0$$

$$x(y - 1) - 1(y - 1) = 0$$

$$(y - 1)(x - 1) = 0$$

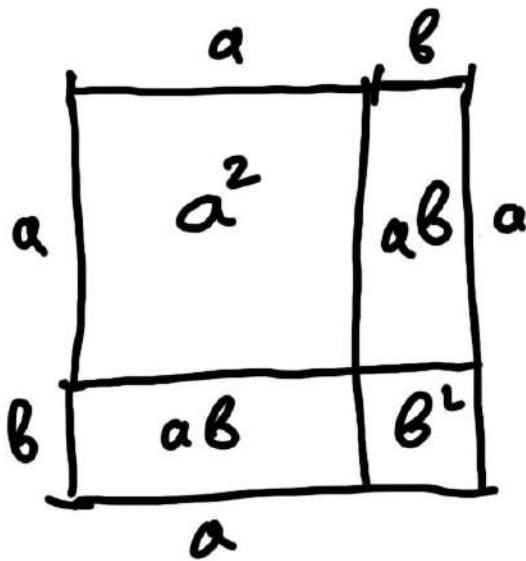
$$y - 1 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$y = 1 \quad x = 1$$

$$A \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

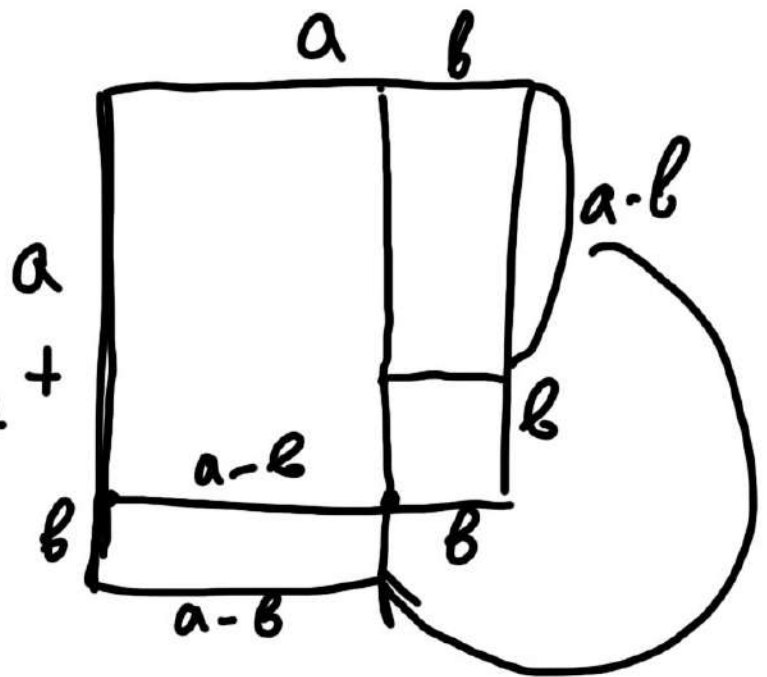
$$B \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$



$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



$$\begin{aligned}
 &A \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
 \rightarrow &B \quad (a-\underline{b})^2 = a^2 - 2a\underline{b} + b^2 \\
 &C \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$(a-\underline{2})^2 = a^2 - 2a \cdot 2 + 2^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$a^2 - 9 = (a+3)(a-3)$$

$$(a - bc^2)^2 = a^2 - 2abc^2 + b^2c^4$$

$$(a+b)^2$$

$$\begin{matrix} (-b)^2 \\ \parallel \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 |a - b|^2 &= (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + \overset{(-b)^2}{b^2} = \\
 &= a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a-b)^2 &= (-(-a+b))^2 = (- (b-a))^2 = \\
 &= (b-a)^2
 \end{aligned}$$

$$A \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$B \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. Докажите, что при любых значениях a, b, c выражение принимает неотрицательные значения: $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2ab - 2bc$

$$\begin{aligned} & a^2 - 2ab + b^2 + \underbrace{b^2 - 2bc + c^2}_{=0} = \\ & = \underbrace{(a - b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b - c)^2}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

$$A \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$B \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^4 - a^2 - 2a$.

$$a^4 = (a^2)^2$$

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

$$a^4 - 2a^2 + 1$$

$$a^4 - a^2 - 2a = \underbrace{a^4 - 2a^2 + 1} + a^2 - 1 - 2a$$

$$= (a^2 - 1)^2 + \underbrace{a^2 - 2a - 1 + 1 - 1} =$$

$$= (a^2 - 1)^2 + \underbrace{a^2 - 2a + 1} - 1 - 1$$

$$= \underbrace{(a^2 - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(a - 1)^2}_{\geq 0} - 2 =$$

$$a = 1$$

$$A \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$B \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

5. Дано: $a + b = 5$, $ab = 6$. Найдите $a^2 + b^2$

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

$$25 - 2 \cdot 6 = 13$$

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 + (a - b)^2 = \\ & = a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 = 2a^2 + 2b^2 \end{aligned}$$

$$D \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$E \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$F \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$G \quad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$\begin{aligned}
 & \text{I} \\
 & (a+b)(a+b)(a+b) \\
 & \quad \quad \quad \overbrace{a^3} \quad \quad \quad \overbrace{-a^2b} \quad \quad \quad \overbrace{ab^2} \\
 & (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \\
 & \quad \quad \quad \overbrace{ba^2} \quad \quad \quad \overbrace{-ab^2} \quad \quad \quad \overbrace{b^3} \\
 & = a^3 + \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} + \cancel{ab^2} + \cancel{ba^2} + b^3
 \end{aligned}$$

$$D \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$E \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$F \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

6. Для ненулевых действительных чисел a и b выполнено равенство:

$$\frac{a^{\cancel{1a^1}}}{b^2} + \frac{b^{\cancel{1b^1}}}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b^{\cancel{1a}}}$$

Докажите, что $a^2 = b^2$.

$$\frac{a^3}{a^1 b^2} + \frac{b^3}{a^2 b^1} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}$$

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 b^2} = \frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 b^2} - \frac{a+b}{ab} = 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab}{a^2 b^2} = 0$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2 - ab)}{a^2 b^2} = 0$$

$$a+b=0 \\ a=-b$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \\ (a-b)^2 = 0$$

$$a-b=0 \\ a=b$$

$$D \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$E \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$F \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

7. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$a + b + c = 0$$

$$c = -(a + b)$$

$$a^3 + b^3 + (-(a + b))^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 =$$

$$= a^3 + b^3 - (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$$

$$= \cancel{a^3} + \cancel{b^3} - \cancel{a^3} - 3a^2b - 3ab^2 - \cancel{b^3} =$$

$$= (-3ab(a + b)) = 3abc$$

$$\text{H } (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$

Handwritten annotations: A bracket above a^4 and a^3b with a slash through a^3b . A bracket below $-ba^3$ and b^3 .

$$\text{I } (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$$

Handwritten annotations: A bracket above a^4 and a^3b with a slash through a^3b . A bracket below $-ba^3$ and b^3 .

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

$$= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Handwritten annotations: A bracket under $(a - b)(a + b)$ labeled 'I'. A bracket under $(a^2 + b^2)$ labeled 'H'.

8. a , b и c — целые числа. Докажите, что если $a = b + c$, то $a^4 + b^4 + c^4$ — удвоенный квадрат целого числа.

$$a^2 = (b + c)^2$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

$$(a^2 - 2bc)^2 = (b^2 + c^2)^2$$

$$(a^2 - 2bc)^2 = b^4 + 2b^2c^2 + c^4$$

$$b^4 + c^4 = (a^2 - 2bc)^2 - 2b^2c^2$$

$$a^4 + (a^2 - 2bc)^2 - 2b^2c^2 = a^4 + a^4 - 2a^2 \cdot 2bc + 4b^2c^2 - 2b^2c^2 = 2a^4 - 4a^2bc + 2b^2c^2$$

$$= 2(a^4 - 2a^2bc + b^2c^2) = 2(a^2 - bc)^2$$

$(a^2)^2 \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad (bc)^2$

$$J \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$K \quad (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n, \text{ где } n \in \mathbb{N}$$

$$L \quad (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + (-1)^{n-1}b^{n-1}) = a^n - b^n$$

$$M \quad (a+b)^n = a^n + b^n$$

$$(a+b+c+d)(a+b+c+d) \quad (-1)^k a^{n-k} b^k$$

$$\frac{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}}{4 \cdot 3} = 6$$

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$C_n^k \quad (a+b)(a+b) \dots (a+b)$$

$$C_n^k a^k b^{n-k}$$

9. a, b, c — такие три числа, что $a + b + c = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение $ab + ac + bc \leq 0$.

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ 0 &\leftarrow \end{aligned}$$

$$2(ab + ac + bc) = -(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0$$

$$ab + ac + bc \leq 0$$

10. Известно, что число n является суммой квадратов трёх натуральных чисел. Показать, что число n^2 тоже является суммой квадратов трёх натуральных чисел.

$$n = a^2 + b^2 + c^2$$

$$n^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + \underbrace{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

$$\begin{aligned} & (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) + \underline{2a^2c^2} + \underline{2b^2c^2} + \\ & + \underline{2a^2c^2} + \underline{2b^2c^2} = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 \\ & \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad + (2ac)^2 + (2bc)^2 \end{aligned}$$

11. Вычислите $123^2 - 122 * 124$

$$123 = a$$

$$\begin{aligned} a^2 - (a-1)(a+1) &= a^2 - (a^2 - 1) = \\ &= \cancel{a^2} - \cancel{a^2} + 1 = \underline{1} \end{aligned}$$

12. Произведение четырёх последовательных положительных нечётных чисел оканчивается на 9. Найдите две предпоследние цифры этого произведения.

1 3 ~~5~~ 7 9

— — — —

7 9 1 3 ←



$n \cdot 10$

$$(10n-3)(10n-1)(10n+1)(10n+3)$$

$$((10n)^2 - 3^2)((10n)^2 - 1^2) =$$

$$= (100n^2 - 9)(100n^2 - 1) =$$

$$= 10000n^4 - 100n^2 - 900n^2 + 9 =$$

$$= 10.000n^4 - 1000n^2 + 9$$

009

13. Представьте числовое выражение $2 \cdot 2025^2 + 2 \cdot 2026^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

$$a = 2025$$

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2(a+1)^2 &= 2a^2 + 2(a^2 + 2a + 1) = \\ &= 2a^2 + 2a^2 + 4a + 2 = \underline{4a^2 + 4a + 2} \quad (\equiv) \end{aligned}$$

$$(2a+1)^2 = 4a^2 + 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 = 4a^2 + 4a + 1$$

$$(\equiv) \quad 4a^2 + 4a + 1 + 1 = (2a+1)^2 + 1^2$$

$$2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 \quad (\equiv)$$

$$a = 2025 \quad b = 2026$$

$$\begin{aligned} (\equiv) \quad & (2025+2026)^2 + (2025-2026)^2 = \\ & = (4051)^2 + (1)^2 \end{aligned}$$

14. Разложить на множители $x^4 + 4$; — тождество Софи Жормен

$$\left(x^4 + 2x^2 \cdot 2 + 4 \right) - 2x^2 \cdot 2 =$$

2^2

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2 + 2x) \times$$
$$\times (x^2 + 2 - 2x)$$

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

15. Про три действительных числа x , y и z известно, что $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$. Могут ли эти числа быть попарно различными?

$$\cancel{x^2} - y^2 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} + y^2 + \cancel{z^2} - 2xy + 2xz - 2yz$$

$$2y^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 0$$

$$2(y^2 - xy + xz - yz) = 0$$

$$\underbrace{y^2 - xy}_{y(y-x)} + \underbrace{xz - yz}_{z(x-y)} = 0$$

$$y(y-x) + z(x-y) = 0$$

$$y(y-x) - z(y-x) = 0$$

$$(y-x)(y-z) = 0$$

$$y-x=0$$

$$y=x$$

$$y-z=0$$

$$y=z$$

$$\underbrace{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

$$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$\underbrace{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}_{\downarrow} - \underbrace{2acbd} + 2acbd$$