

Геометрическое место точек (ГМТ), окружность

30 марта 2026

Определение. *Геометрическим местом точек* (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, которые удовлетворяют какому-либо определенному условию.

Теорема. Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Теорема. Дан отрезок AB . Геометрическим местом точек M таких, что $AM < BM$, является полуплоскость, расположенная по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB , что и точка A .

Теорема. Геометрическим местом точек внутри угла, равноудалённых от его сторон, является биссектриса этого угла.

Определение. *Окружность* — это множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, а указанное расстояние — *радиусом* окружности. *Хордой* называется отрезок, соединяющий любые две точки окружности. *Диаметром* окружности называется хорда, проходящая через её центр.

Круг — это множество всех точек плоскости, удалённых от от данной точки не более чем на длину данного отрезка. Данная точка называется *центром* круга, а указанное расстояние — *радиусом* круга.

Теорема. (а) Окружность с центром в середине гипотенузы прямоугольного треугольника проходит через вершину прямого угла.

(б) Диаметр окружности из любой её точки виден под прямым углом.

Определение. *Касательная к окружности* — это прямая, которая имеет одну общую точку с окружностью.

Теорема. (а) (*Свойство касательной.*) Касательная к окружность перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

(б) (*Признак касательной.*) Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Геометрическое место точек (ГМТ), окружность

30 марта 2026

Базовый уровень

- Докажите, что
 - равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.
 - хорды, удалённые от центра окружности на равные расстояния, равны.
- Докажите, что
 - диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.
 - диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.
- Точки A , B и C лежат на прямой m , а точки D и E на ней не лежат. Известно, что $AD = AE$ и $BD = BE$. Докажите, что $CD = CE$.
- Биссектрисы углов, смежных с углами A и C треугольника ABC , пересекаются в точке I_b . Докажите, что точка I_b лежит на биссектрисе угла B .
 - Биссектриса угла A и угла, смежного с углом C треугольника ABC , пересекаются в точке I_a . Докажите, что точка I_a лежит на биссектрисе угла, смежного с углом B .
 - Найдите ГМТ, равноудалённых от трёх прямых, среди которых нет параллельных.
- Дан равносторонний треугольник ABC . Закрасьте на плоскости множество точек M внутри него, что AM меньше BM и CM .
- Через точку C окружности с центром O провели касательную к этой окружности, хорда AB — диаметр окружности. Из точки A на касательную опущен перпендикуляр AD . Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD .

Продвинутый уровень

- Теорема об угле между касательной и хордой.** Прямая AC касается окружности с центром O в точке A , B — произвольная точка на окружности. Докажите, что $\angle AOB = 2\angle CAB$
- В четырёхугольнике $ABCD$ углы B и C тупые и равны α . Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке I . Найдите угол AID .
- В окружности проведены две равные непересекающиеся хорды AB и CD . Известно, что хорды AC и BD пересекаются. Докажите, что
 - хорды AC и BD равны;
 - хорды BC и AD параллельны.

10. В окружность вписана ломаная, состоящая из трёх равных звеньев. Расстояние между началом и концом ломаной равно **(а)** диаметру, **(б)** радиусу окружности. Найдите угол между соседними звеньями ломанной. (*В задаче возможны несколько ответов.*)
11. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ M таких, что $AM \leq BM \leq CM \leq DM$.
12. Дан четырехугольник $ABCD$ с равными сторонами AD и BC . Точка O равноудалена от концов отрезка AB и равноудалена от концов отрезка CD . Докажите, что O равноудалена от середин сторон AD и BC .
13. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = \angle DBC = 60^\circ$, $\angle ADB = 40^\circ$, а $\angle BDC = 70^\circ$. Найдите угол между его диагоналями.