

Формулы сокращенного умножения: семинар

1. (Устная задача) Вычислите $\frac{2025}{202520252025^2 - 202520252024 \cdot 202520252026}$
2. (Устная задача) Объясните, в чём ошибка в решении, и приведите правильное решение.

Условие: Решите уравнение $(1 + x + \dots + x^9)(1 + x + \dots + x^{11}) = (1 + x + \dots + x^{10})^2$

Решение. Домножим обе части уравнения на $(x - 1)^2$ и свернем формулы сокращенного умножения. Получим: $(x^{10} - 1)(x^{12} - 1) = (x^{11} - 1)^2$

Раскрыв скобки, получим, что $x^{22} - x^{12} - x^{10} + 1 = x^{22} - 2x^{11} + 1$.

Перенесем все слагаемые в одну сторону, сгруппируем и вынесем за скобки общий множитель x^{10} , получим $x^{10}(x - 1)^2 = 0$. Корни этого уравнения: $x = 0$ или $x = 1$.

Ответ: 0; 1.

3. (Устная задача) Вычислите значение выражения $x^4 + \frac{1}{x^4}$, если $x + \frac{1}{x} = 3$
4. (Устная задача) Вычислите $\frac{(2001 \cdot 2021 + 100)(1991 \cdot 2031 + 400)}{2011^4}$
5. (Устная задача) Известно, что $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ac = 5$. Чему может равняться $a^2 + b^2 + c^2$?
6. (Устная задача) Найдите наибольшее возможное значение выражения:

$$20x - 4y + 6z - 2x^2 - 4y^2 - 3z^2 - 2.$$

7. (Устная задача) Можно ли представить число $\left(\frac{17^2 + 19^2}{2}\right)^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?
8. (Устная задача) Можно ли в записи $2013^2 - 2012^2 - \dots - 2^2 - 1^2$ некоторые минусы заменить на плюсы так, чтобы значение получившегося выражения стало равно 2013?
9. (Устная задача) Пусть a, b, c, d – такие вещественные числа, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$. Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.
10. (Письменная задача) Найдите x, y, z если

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

11. (Устная задача) Известно, что $5(a - 1) = b + a^2$. Сравните числа a и b .