

Принцип крайнего

1. Сколькими способами можно записать в строчку числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались ~~не более~~ чем на 1?

Решено

1-2-3 4 5 6 7 . . . 99 100

100 99 4 3 2 1

2. Можно ли выписать в строку все натуральные числа от 1 до 99 так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?

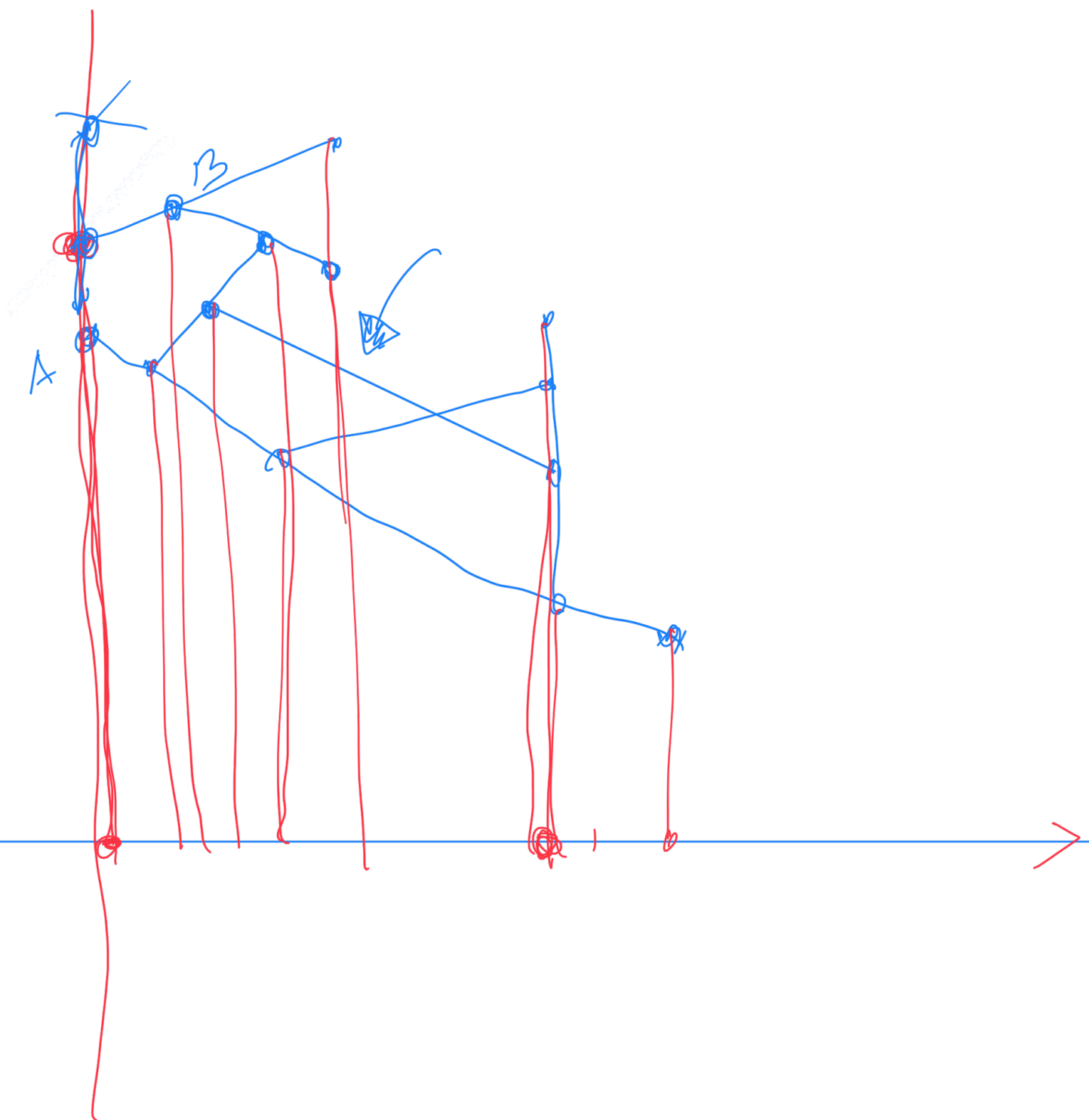
1 51 ... 99



49 $\rightarrow$ 99

~~X~~ 50 ~~X~~

3. Можно ли расположить на плоскости 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими своими концами упирался строго внутри других отрезков?



4. Имеется набор из 19 гирь, их массы равны 1, 2, 3, ..., 19 г. Известно, что в наборе девять серебряных гирь, девять бронзовых и одна золотая, причём суммарная масса серебряных гирь на 90 грамм больше суммарной массы бронзовых. Сколько грамм может весить золотая гиря?

$$\sum \text{сер} = \sum \text{брон} + 90$$

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 \\ + \\ 19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 \end{array} \leftarrow$$

20 20 20

$$\frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\ n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \end{array} \leftarrow$$

$$\boxed{\frac{(n+1)n}{2}}$$

$$190 = \sum \text{бр} + \sum \text{сер} + \text{зол} =$$

$$= \sum \text{брон} + \sum \text{брон} + 90 + 30x$$

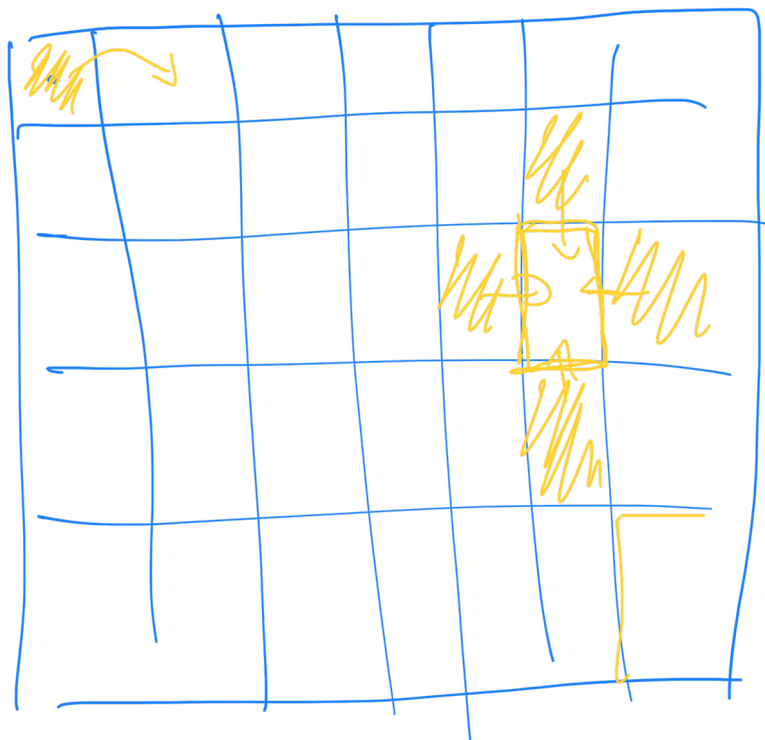
$$100 = 2 \cdot \sum \text{брон} + 30x$$

$$\text{брон} \quad \boxed{1 + \dots + 9} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

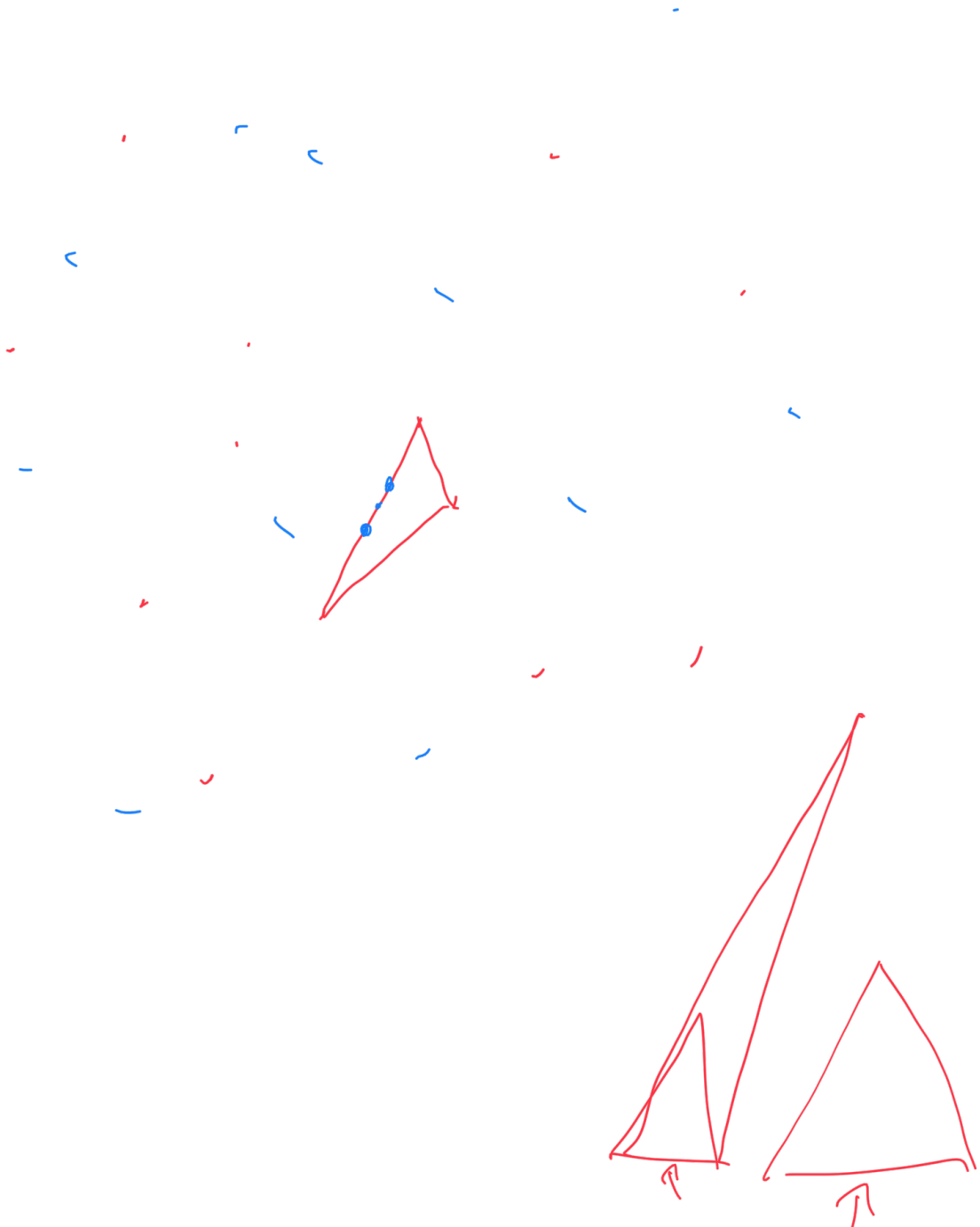
$$\begin{aligned} \text{серебр} \quad \boxed{11 + \dots + 19} &= 1 + \dots + 19 - (1 + \dots + 10) = \\ &= \frac{20 \cdot 19}{2} - \frac{11 \cdot 10}{2} = 190 - 55 = \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{135} = 90 + 45$$

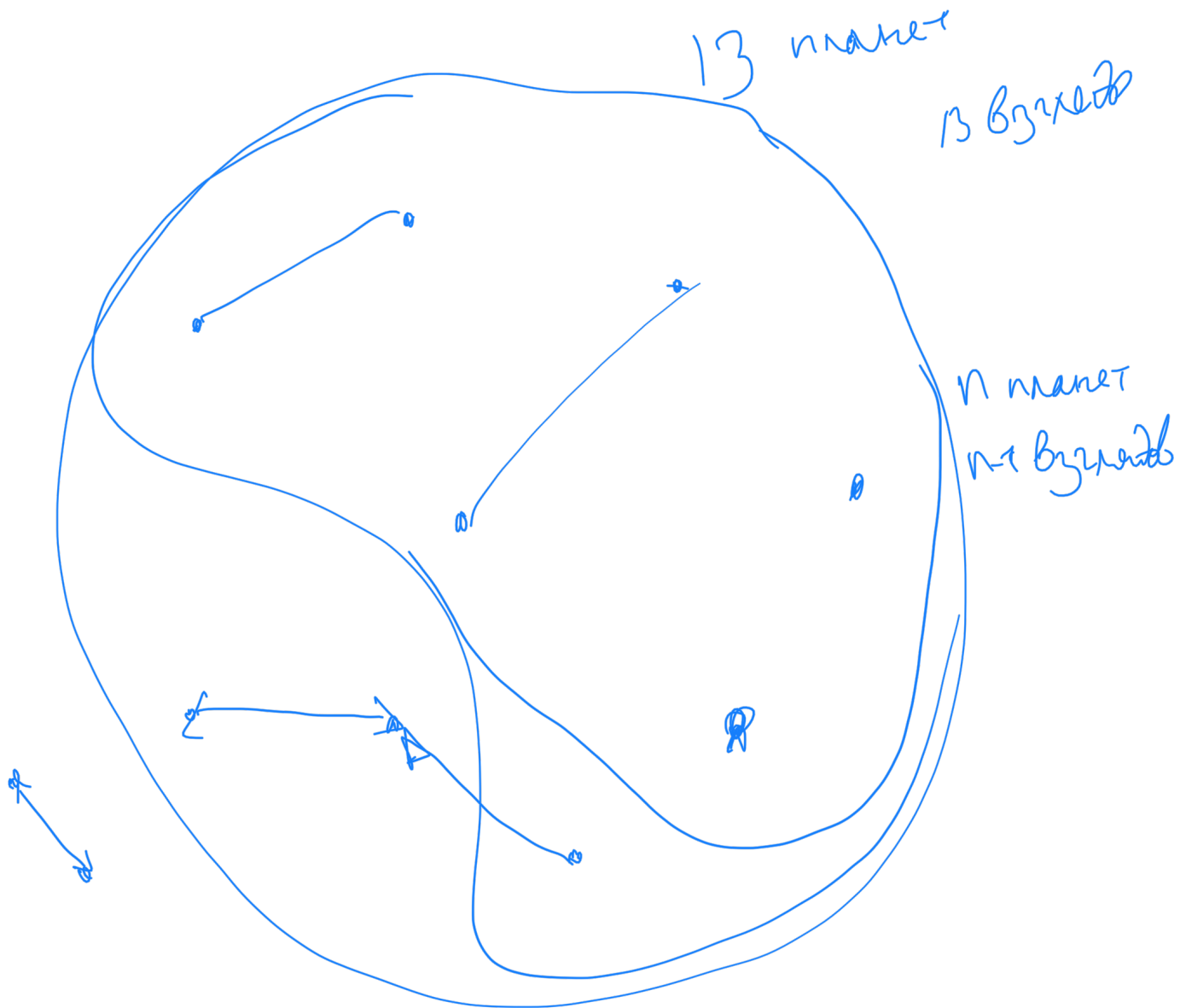
5. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как хромая ладья (на одну клетку по вертикали или горизонтали). Попав в очередную клетку, он либо перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона кладут на чёрную доску размером 8×8 клеток. Сможет ли он раскрасить её в шахматном порядке?



6. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трёх). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трёх сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.



7. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, каждый из которых наблюдает за ближайшей к нему планетой. Докажите, что некоторую планету никто не наблюдает.

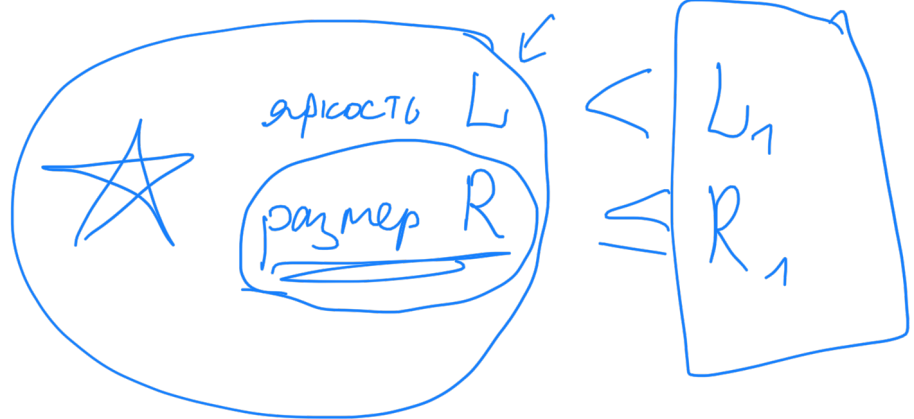


8. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

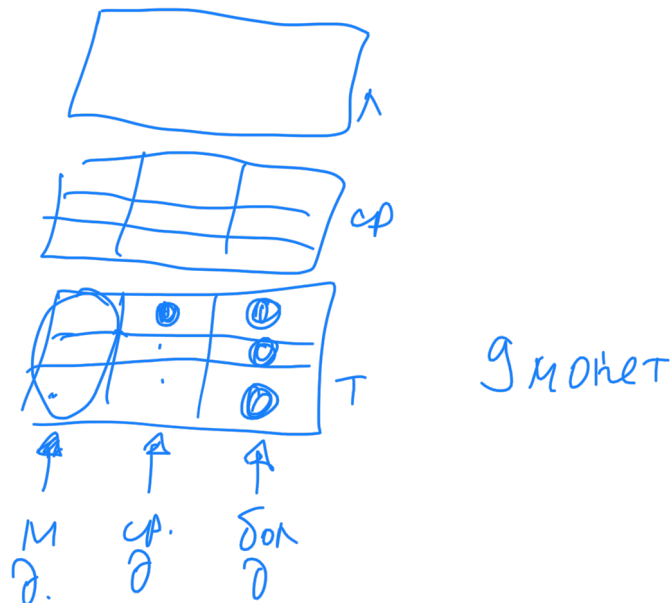
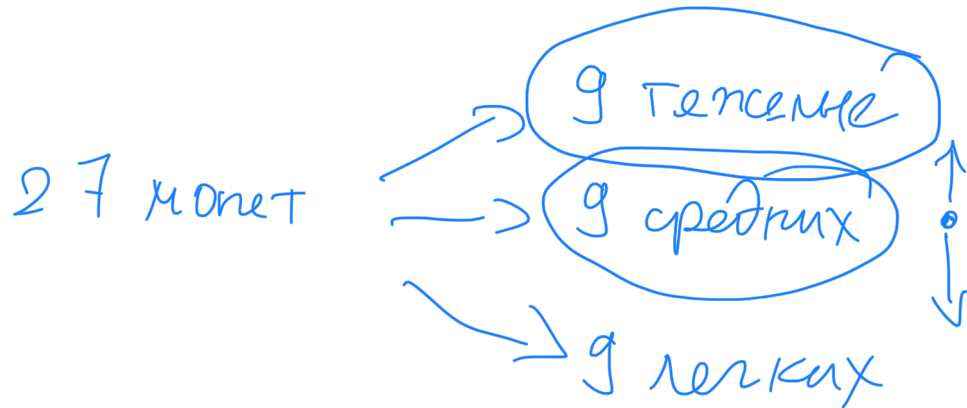
~~#~~ . R

яркостей ∞

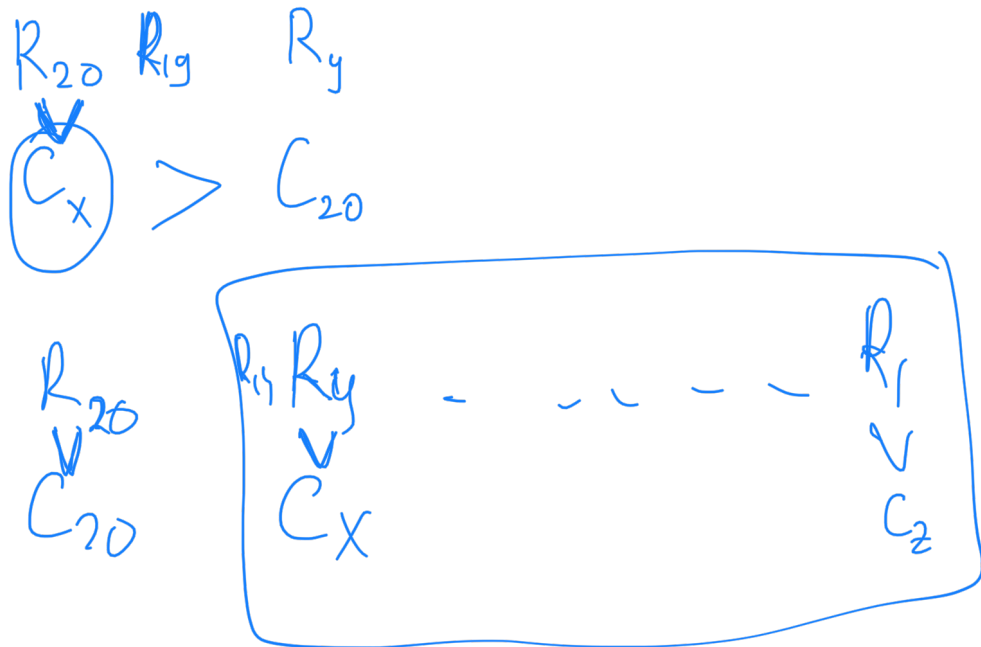
Наименьшего размера



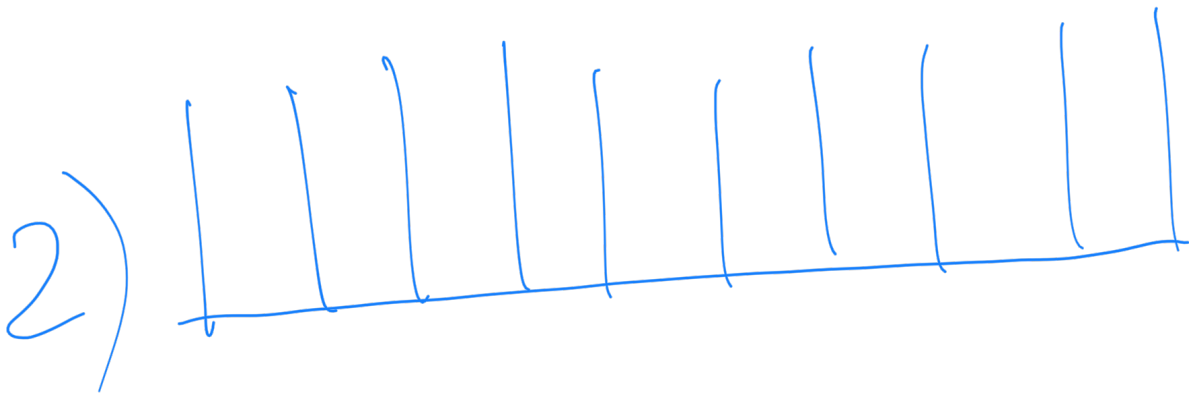
9. Артём коллекционирует монеты. В его коллекции 27 монет, причём все они имеют различный диаметр, различную массу и были выпущены в разные годы. Каждая монета хранится в отдельном спичечном коробке. Может ли Артём сложить из этих коробков параллелепипед $3 \times 3 \times 3$ так, чтобы любая монета была легче монеты, находящейся под ней, меньше монеты справа от нее и древнее той, которая находится перед ней?



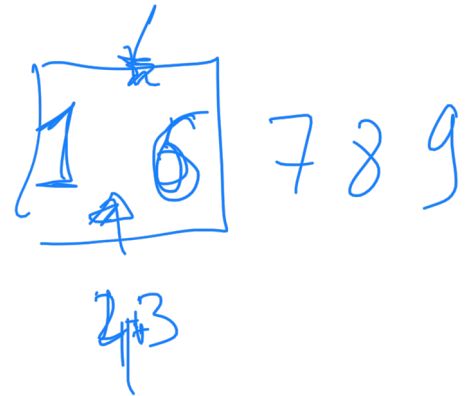
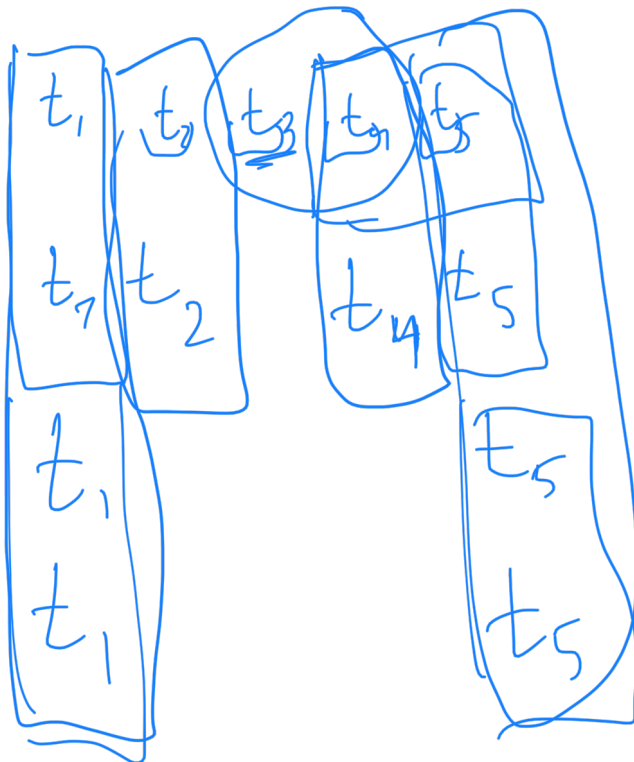
10. Двадцать рыцарей надели двадцать плащей, и каждому плащ оказался короток. Тогда рыцари, сняв плащи, выстроились по росту. Самый высокий рыцарь взял себе самый длинный плащ, второй взял себе самый длинный плащ из оставшихся и т.д. Рыцарь самого маленького роста взял себе самый короткий плащ. Докажите, что и в этом случае каждому рыцарю плащ окажется короток.



11. Солдаты построены в две шеренги по n человек, так что каждый солдат из первой шеренги не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги. В шеренгах солдат выстроили по росту. Докажите, что после этого каждый солдат из первой шеренги также будет не выше стоящего за ним солдата из второй шеренги.



12. Имеется набор гирь со следующими свойствами: В нем есть 5 гирь, попарно различных по весу. Для любых двух гирь найдутся две другие гири того же суммарного веса. Какое наименьшее число гирь может быть в этом наборе?



$$4 + 4 + 2 + 2 + 1 = 13$$

1	2	3	4	5
1	2		4	5
1				5
1				5

13. 7 грибников собрали в сумме 100 грибов. Все собрали разное количество. Докажите, что найдутся трое грибников, собравшие в сумме не менее 50 грибов.

$$\begin{array}{l}
 g_1 \leq 17 \\
 g_2 \leq 16 \\
 g_3 \leq 15 \\
 g_4 \leq 14 \\
 g_5 \leq 13 \\
 g_6 \leq 12 \\
 g_7 \leq 11
 \end{array}$$

$$\boxed{15 \quad 16 \quad 17}$$

$$15 \quad 15+1 \quad 15+2$$

$$(48) + 3 = 51$$

$$\leq 99$$

$$16 \quad 17 \quad 18$$

$$\begin{array}{r}
 \checkmark \quad 11 + 12 + \dots + 16 + 17 \quad \checkmark \\
 17 + 16 + \dots + 12 + 11 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\frac{28 \cdot 7}{2} = 14 \cdot 7 = 49 \cdot 2 = 98$$

$$100 = \sum g \leq \underbrace{(1 + \dots + 17)}_{49} - (1 + \dots + 10) = \underline{\underline{98}}$$

$$\boxed{18 \quad 16 \quad 15 \quad \dots}$$

14. В кастрюле лежат 20 кусков шашлыка. Известно, что любые 11 из них в сумме весят больше 500 граммов, а любые 10 в сумме весят меньше 500. Докажите, что найдётся кусок шашлыка с весом от 45 до 50 г (включительно). Веса кусков шашлыка могут быть нецелыми.

$$W_1, W_2, \dots, W_{11}, W_{12}, \dots, W_{20}$$

$$\underbrace{W_1, W_2, \dots, W_{11}}_{> 500 \text{ г}}$$

$$500 : 11 = 45, \dots$$

$$W_{11} < k$$

$$W_{10} < k$$

$$W_9 < k$$

$$\vdots$$

$$W_1 < k$$

$$W_1 + \dots + W_{11} < 11k$$

$$500$$

$$45 \cdot 11 < 500$$

$$\boxed{W_{11} > 45}$$

$$\overset{>50}{W_{11}} \dots \overset{>50}{W_{15}} \dots \overset{>50}{W_{20}}$$

$$\sum_{n=11}^{20} W_n > 50 = 50 \cdot 10$$

$$W_{11} < 50$$

15. В ряд лежит чётное число групп. Массы любых двух соседних групп отличаются не более чем на 1 г. Докажите, что можно все группы разложить по две в одинаковые пакеты и выложить пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов тоже отличались не более чем на 1 г.

1 2 2 3 4 3 4 3 2.

