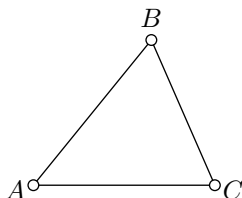


Равные треугольники

Определение.

Треугольником называется геометрическая фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.



Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — *сторонами* треугольника.

Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный лучами AB и AC . Так же определяются углы треугольника при вершинах B и C .

Даны три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой. Треугольник ABC обозначаются $\triangle ABC$. Этот же треугольник можно обозначить по-другому: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.

A , B и C — *вершины* треугольника.

AB , BC , CA — *стороны* треугольника.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — *углы* треугольника.

$\angle B$ — *угол, противолежащий стороне AC .*

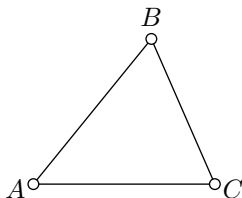
$\angle A$ и $\angle C$ — *углы, прилежащие к стороне AC .*

AC — *сторона, противолежащая углу B .*

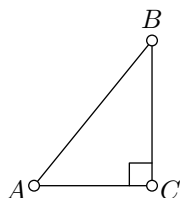
AB и AC — *стороны, прилежащие к углу A .*

Определение.

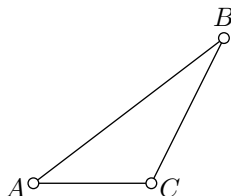
Треугольник называют *остроугольным*, если все его углы острые.

**Определение.**

Треугольник называют *прямоугольным*, если один из его углов прямой.

**Определение.**

Треугольник называют *тупоугольным*, если один из его углов тупой.



Определение.

Два треугольника называются *равными*, если их можно совместить наложением.



Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Определение.

Те стороны, и те углы, которые совмещаются при наложении равных треугольников называются *соответственными*.

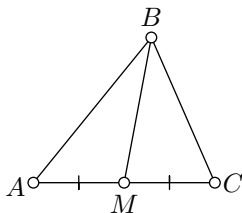
На рисунке стороны AC и A_1C_1 , углы A и A_1 — соответственные.

На рисунке равные стороны отмечают одинаковым количеством чёрточек, а равные углы — одинаковым количеством дужек.

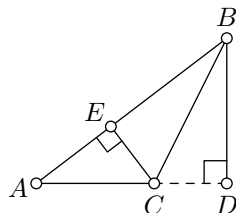
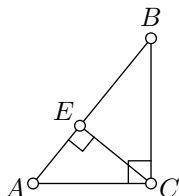
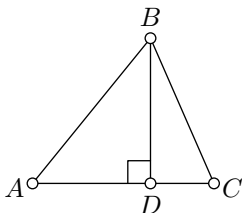
В равных треугольниках против соответственных углов лежат соответственные углы, и наоборот: против соответственных углов лежат соответственные стороны.

Определение.

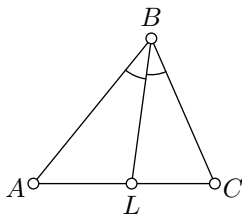
Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны.

**Определение.**

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону.

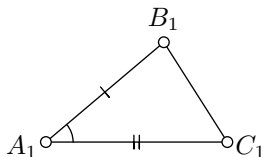
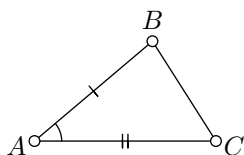
**Определение.**

Биссектрисой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне и делящий соответствующий угол пополам.



Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Задача 1.

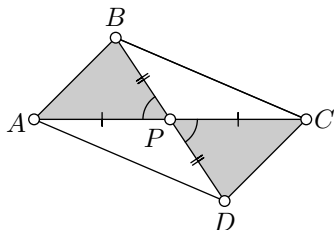
Отрезки AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что P является серединой каждого из отрезков AC и BD .

(а) Докажите, что $AB = CD$.

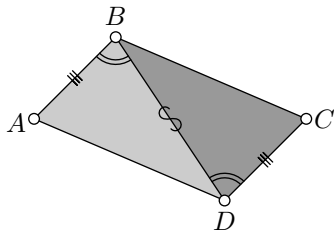
(б) Докажите, что треугольники ABD и CDB равны.

Решение:

(а) Треугольники ABP и CDP равны по первому признаку ($AP = PC$, $BP = PD$ и $\angle APB = \angle CPD$.) Следовательно, $AB = CD$.

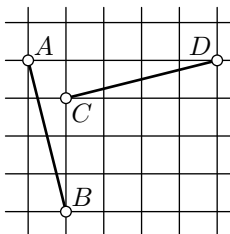


(б) Поскольку $\triangle ABP = \triangle CDP$ равны, то $AB = CD$ и $\angle ABD = \angle CDB$. Сторона BD общая для треугольников ABD и CDB . Поэтому треугольники ABD и CDB равны по первому признаку.

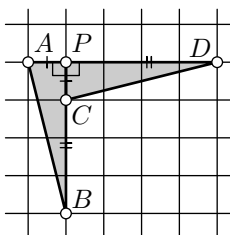


Задача 2.

На клетчатой бумаге нарисовали отрезки AB и CD так, как показано на рисунке. Докажите, что они равны.

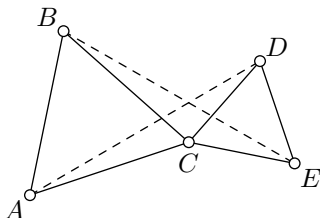


Решение: Отметим на рисунке точку P . Тогда треугольники ABP и CDP равны по первому признаку ($AP = PC = 1$, $BP = PD = 4$ и $\angle APB = \angle CPD = 90^\circ$.) Следовательно, $AB = CD$.



Задача 3.

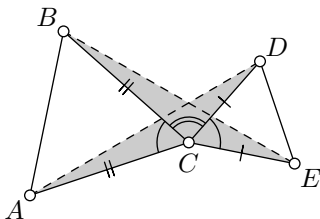
Два правильных треугольника ABC и CDE имеют общую вершину (см. рис). Докажите, что отрезки AD и BE равны.



Решение: Поскольку треугольники ABC и CDE правильные, $AC = BC$, $CD = CE$ и $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$. Поэтому

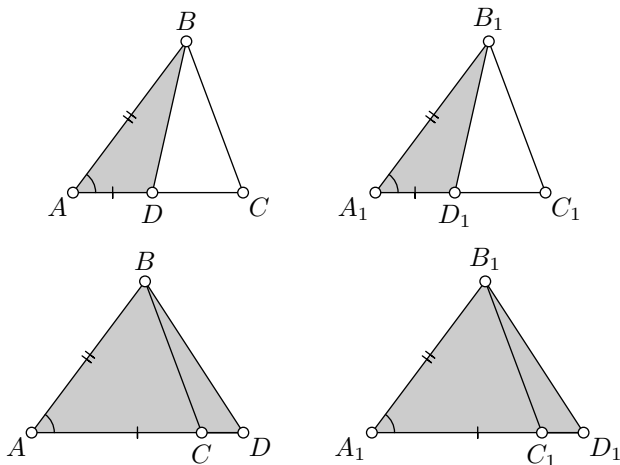
$$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD = \angle BCE.$$

Следовательно, треугольники ACD и BCE равны по первому признаку ($AC = BC$, $CD = CE$ и $\angle ACD = \angle BCE$). Таким образом, $AD = BE$.



Задача 4.

В равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ на лучах AC и A_1C_1 отложены равные отрезки AD и A_1D_1 соответственно. Докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$; BCD и $B_1C_1D_1$.

Решение:**Задача 5.**

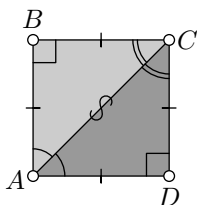
Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к соответственным сторонам, равны.

Решение:

Это частный случай прошлой задачи.

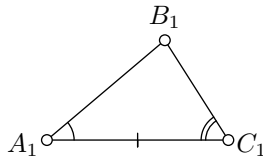
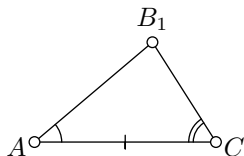
Задача 6.

Докажите, что в квадрате диагональ является биссектрисой углов, из которых она проведена.

Решение:

Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

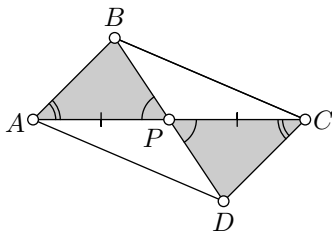


Задача 7.

Отрезки AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что P является серединой отрезка AC и $\angle BAP = \angle DCP$. Докажите, что $AB = CD$.

Решение:

Треугольники ABP и CDP равны по второму признаку ($AP = PC$, $\angle BAP = \angle DCP$ и $\angle APB = \angle CPD$.) Следовательно, $AB = CD$.



Задача 8. В равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ на лучах AC и A_1C_1 отмечены такие точки D и D_1 соответственно, что $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$. Докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$; BCD и $B_1C_1D_1$.

Решение:

