

Метод математической индукции

Рассмотрим утверждение типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т. д.

Шаг 0: Найдите в условии задачи такое замаскированное утверждение (и переменную n). Переделайте формулировку условия в виде цепочки утверждений.

Шаг 1: База индукции. Докажите утверждение(-я) из начала цепочки (обычно это $n = 1$, но не обязательно).

Шаг 2: Предположение индукции. Допустим, что утверждения цепочки с номерами $1, 2, \dots, k$ верны.

Шаг 3: Переход индукции. Докажите, что если верно утверждение цепочки с номером k (*предположение индукции*), то верно утверждение цепочки с номером $k + 1$.

Принцип математической индукции. Если верна база индукции, и верен переход индукции, то верны все утверждения цепочки, ибо до каждого из них можно дойти от базы шагами перехода.

1. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт борода. Его пересекает несколько прямых (никакие три прямые не проходят через одну точку), на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт борода. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.
2. Плоскость поделена на области несколькими прямыми и окружностями. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)
3. Докажите тождество: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
4. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на n правильных треугольников для любого n , начиная с шести.
5. (письменно) Докажите тождество: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
6. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.
7. Докажите, что для любого натурального n число $10^n + 18n - 1$ делится на 27.
8. Найдите ошибку в рассуждениях. Верно ли исходное утверждение?

«Утверждение». При разбиении прямоугольника на n прямоугольников ($n \geq 2$) всегда найдутся два, которые имеют общую сторону.

«Доказательство». При $n = 2$ утверждение верно. Предположим, что при разбиении прямоугольника на $k \geq 2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины. Разделим какой-нибудь прямоугольник на два прямоугольника. Тогда эти у этих двух прямоугольников совпадают две вершины. Итак, мы получили, что данный прямоугольник разбит на $k + 1$ прямоугольников среди которых есть два, у которых совпадают две вершины. $\square$

9. (письменно) Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$ и $B_1B_2B_3B_4 \dots B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2, A_2A_3 = B_2B_3, \dots, A_nA_1 = B_nB_1$ и $n-3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?
10. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.
11. В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $1/n$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой. (Мензурки одинаковые, но количества жидкостей в них могут быть разными; предполагается, что можно отмерять любой объём жидкости.)

HW BONUS. n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $1/n$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.