

Прямоугольные треугольники

8 декабря 2025

1. **(Письменно)** В треугольнике ABC угол A на 120° больше угла C . Докажите, что биссектриса BL вдвое длиннее, чем высота BH .
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , BL — его биссектриса, точка K на стороне AB такова, что $CK = AC$. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что отрезок CK пересекает отрезок BL в его середине.
3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC . Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.
4. **(Письменно)** Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , AD — его высота. На отрезке BD отмечена такая точка E , что $AM = DE$. На отрезке EM отмечена такая точка F , что $EF = FC$. Докажите, что CF — биссектриса угла C треугольника ABC .
5. Дан прямоугольный треугольник ABC . На катете BC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BCD , а на гипотенузе AB во внутреннюю сторону — равносторонний треугольник ABE . Прямые DE и BC пересекаются в точке M . Найдите CM , если $BC = 10$.
6. **(Письменно)** В выпуклом четырёхугольнике семь из восьми отрезков, соединяющих вершины с серединами противоположных сторон, равны. Докажите, что все восемь отрезков равны.
7. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , точка D на стороне AB такова, что $BD = BC$, а точка E на стороне BC такова, что $DE = BE$. Докажите, что $AD + CE = DE$.
8. В треугольнике ABC угол A равен 30° , а угол B равен 15° . Найдите угол между медианой CM и стороной AB .
9. В треугольнике ABC провели биссектрису BD . Точка E выбрана так, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$, и при этом отрезок ED пересекается с отрезком AB в точке K . Докажите, что $KE = KD$.

Прямоугольные треугольники

8 декабря 2025

Задачи, которые можно обсудить (но не сдавать) на семинаре:

10. Докажите равенство остроугольных треугольников по стороне и высотам, опущенным на две другие стороны. Верно ли это утверждение для тупоугольных треугольников? А для прямоугольных? Что изменится, если убрать условие про вид треугольника из условия?
11. (а) Две высоты треугольника равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
(б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
12. (а) Докажите, что точка на биссектрисе угла равноудалена от его сторон.
(б) Докажите, что если точка внутри угла равноудалена от его сторон, то она находится на его биссектрисе.
13. Медиана разбивает треугольник на два меньших треугольника. Докажите, что высоты этих треугольников, проведённые к этой медиане, равны.
14. Прямая проходит через середины двух сторон треугольника. Докажите, что высоты, опущенные на нее из концов третьей стороны треугольника равны.
15. (а) Одна из сторон треугольника в два раза короче другой, а угол между ними равен 60° . Обязательно ли треугольник прямоугольный?
(б) Одна из сторон треугольника в два раза короче другой, а угол напротив неё равен 30° . Обязательно ли треугольник прямоугольный?
16. В треугольнике ABC угол A равен 60° , а биссектриса AM , медиана BN и высота CL пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.
17. В треугольнике ABC биссектриса угла A , серединный перпендикуляр к стороне AB и высота, опущенная из вершины B , пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектриса угла A , серединный перпендикуляр к AC и высота, опущенная из C , также пересекаются в одной точке.
18. Дан прямоугольный треугольнике ABC с прямым углом C , CH — его высота, точка D на стороне BC такова, что $\angle DAC = \angle DBA$. Докажите, что высота CH пересекает отрезок AD в его середине.
19. Дан остроугольный треугольник ABC с углом B , равным 60° , AA' и CC' — его высоты, M — середина стороны AC . Докажите, что треугольник $A'MC'$ — равносторонний.
20. Дан треугольник ABC , AA' и CC' — его высоты, H — точка их пересечения, M и N — середины отрезков AC и BH соответственно. Докажите, что прямые MN и $A'C'$ перпендикулярны.