НОД и НОК

Дедлайн сдачи и разбор задач — семинар 6 февраля.

Чтобы сдавать задачи продвинутого уровня, нужно сдать все задачи базового.

Базовый уровень

1. Ваня посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Лёша — всех чисел от 501 до 1000. У кого получилось больше и во сколько раз?

2. Натуральные числа x, y, z таковы, что $\text{НОД}(x, y) = z$ и $\text{НОК}(y, z) = x$. Докажите, что $x = y = z$.

3. Найдите НОД всех шестизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 без повторений.

4. Наименьшее общее кратное двух чисел в 8 раз больше их наибольшего общего делителя. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое.

Продвинутый уровень

5. Существуют ли 2026 натуральных чисел, которые взаимно просты в совокупности, но каждые два числа из них не взаимно просты.

6. **(Письменно)** Сколько решений $(a; b)$ в натуральных числах, не больших 1000000, имеет уравнение:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{\text{НОК}(a, b)} = \frac{1}{\text{НОД}(a, b)}$$

при условии $b \geqslant a$?

7. Взаимно простые натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ кратно $a - b$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$ и $4ab + 1$ является точным квадратом.

8. Докажите, что если $\text{НОК}(a, a + 5) = \text{НОК}(b, b + 5)$, то $a = b$.

9. **(Письменно)** Натуральные числа a, b, c таковы, что $\text{НОД}(a, b) + \text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, c) + \text{НОК}(a, c)$. Верно ли, что тогда обязательно $b = c$?

10. Сумма трёх различных натуральных чисел равна 2000.

(а) Какое наибольшее значение может принимать НОД всех трёх чисел?

(б) Какое наименьшее значение может принимать НОК всех трёх чисел?