НОД и НОК

Основная теорема арифметики. Любое натуральное число $n > 1$ может быть единственным образом представлено в виде произведения:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

где $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ — простые числа, α_i — натуральные числа.

Лемма Евклида. Если произведение нескольких натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы один из множителей делится на p.

Определение. *Наибольший общий делитель (НОД)* набора целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все из котрых нули, — наибольшее натуральное число, которое делит каждое из чисел набора.

- Чтобы найти НОД, нужно разложить каждое из чисел на простые множители, и выбрать в НОД минимальную степень вхождения каждого из простых множителей.
- Любой общий делитель набора целых чисел делит их НОД.

Определение. *Наименьшее общее кратное (НОК)* набора целых ненулевых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — наименьшее натуральное число, которое кратно каждому из чисел набора.

- Чтобы найти НОК, нужно разложить каждое из чисел на простые множители, и выбрать в НОК максимальную степень вхождения каждого из простых множителей.
- Любое общее кратное набора целых чисел кратно их НОКу.

---

1. Докажите, что

(а) $\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = ab$.

(б) $\text{НОД}(a; b; c) \cdot \text{НОК}(ab; bc; ca) = \text{НОД}(ab; bc; ca) \cdot \text{НОК}(a; b; c) = abc$.

2. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: $1, 2, 3, 4, 5, N$, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?

Определение. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *взаимно просты в совокупности*, если у них нет общего простого делителя.

Определение. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *взаимно просты попарно*, если у каждой пары нет общего простого делителя.

Полезно делать новые числа, кратные НОДу. Например, $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a-b; b)$.

---

3. $\text{НОД}(a, b) = 1$. Докажите, что $\text{НОД}(a+b, a^2+b^2) \leqslant 2$.

4. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ — простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ — взаимно простые.

Замена через НОД. Пусть $\text{НОД}(a, b) = d$. Тогда

- $a = a_0 \cdot d$, где a_0 — целое;
- $b = b_0 \cdot d$, где b_0 — целое;
- $\text{НОД}(a_0, b_0) = 1$, $\text{НОК}(a_0, b_0) = a_0 b_0$;
- $\text{НОК}(a, b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}(a, b)} = a_0 \cdot b_0 \cdot d$.

---

5. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОК}(m, n) + \text{НОД}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

Полезные оценки. Эти идеи могут помочь с оценками:

- Если $a \vdots b$, то $|a| \geqslant |b|$ или $a = 0$;
- Если $a > b$ при натуральных a и b, то $\text{НОД}(a, b) \leqslant \min\{b, a - b\}$.

---

6. Про натуральное число n известно, что $\text{НОД}(n, n+1) < \text{НОД}(n, n+2) < \ldots < \text{НОД}(n, n+35)$. Докажите, что $\text{НОД}(n, n+35) < \text{НОД}(n, n+36)$.